รายงาน

เรื่อง การโก่งตัวโดยวิธีของงานและพลังงาน

(Deflection by Work and Energy)

เสนอ

ผศ.ดร.เรืองรุชดิ์ ชีระโรจน์

จัดทำโดย

1.	นางสาวณัฐธยาน์	หอมพามา	56010310075	วิศวกรรมโยธา
2.	นางสาวฝนทิพย์	แนบสนิท	56010310153	วิศวกรรมโยธา
3.	นางสาวพรศิริ	ประเสริฐสังข์	56010310164	วิศวกรรมโยธา
4.	นางสาวพิชญา	ศรีเสน	56010310174	วิศวกรรมโยธา
5.	นางสาววชิรญาล์	อรรถสาร	56010310228	วิศวกรรมโยธา
6.	นายศักดิ์ดา	พลสีดา	56010315170	วิศวกรรมโยธา

รายงานเล่มนี้เป็นส่วนหนึ่งของวิชา Structure of Theory

ภาคการเรียนที่ 2/2557 สาขาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

คำนำ

รายงานเล่มนี้เป็นส่วนหนึ่งของรายวิชา Structure of Theory เรื่องการโก่งตัวโดยวิธีของงานและพลังงาน (Deflection by Work and Energy) ซึ่งผู้จัดทำได้ศึกษาค้นคว้าจากหนังสือและอินเทอร์เน็ตรวมถึงการเรียนการสอนในห้องเรียนที่เกี่ยวกับเนื้อหาและการปฏิบัติการในการปฏิบัติการ เพื่อความถูกต้องแม่นยำและคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด หวังเป็นอย่างยิ่งว่ารายงานเล่มนี้จะให้ประโยชน์ต่อผู้ที่สนใจไม่มากก็น้อย หากมีข้อผิดพลาดประการใดคณะผู้จัดทำจึงขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

คณะผู้จัดทำ

บทที่ 6 การโก่งตัวโดยวิธีของงานและพลังงาน

(Deflection by Work and Energy)

การหาค่าการโก่งตัวของคานที่ไม่มีความซับซ้อน อาจใช้วิธีพื้นที่ของโมเมนต์หรือวิธีคานเสมือนแต่ในกรณีของคานต่อเนื่อง โครงข้อหมุน หรือ โครงข้อแข็ง การประยุกต์ใช้หลักการของงานและพลังงานจะมีความง่ายกว่าวิธีเชิงเรขาคณิต เนื่องจากไม่ต้องอาศัยรูปร่างการโก่งตัวของโครงสร้าง โดยหลักการของงานและพลังงาน อาศัยหลักการอนุรักษ์พลังงาน กล่าวคือเมื่อมีแรงมากระทำต่อโครงสร้างจะทำให้เกิดงานภายนอก (External Work) และจะถูกเปลี่ยนรูปร่างเป็นงานภายใน (Internal Work) หรือพลังงานความเครียด (Strain energy) ทำให้โครงสร้างเกิดการเปลี่ยนแปลง (Deformations)หรือเกิดการเคลื่อนที่ (Displacement)หรือเกิดการโก่งตัว (Deflection) โดยที่

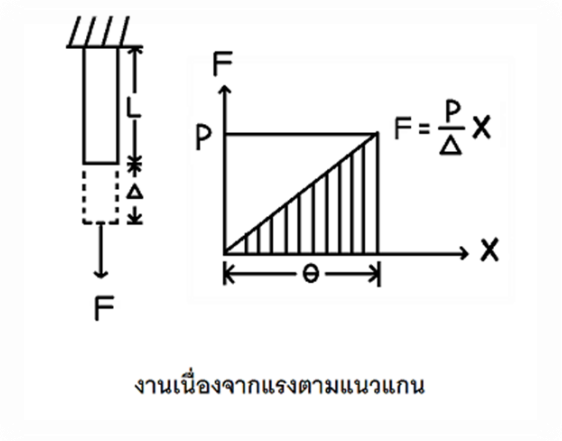
$$U_e = U_i \qquad \text{.....6.1}$$

U_e = งานภายนอก

U_i = งานภายใน

โดยที่ $Ue = W = PS$ 6.2

6.1งาน(Work)



รูปที่ 1

เมื่อมีแรง F แรงเล็กๆ F มากระทำกับโครงสร้าง จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่เป็นระยะเล็กๆ dx ในทิศทางเดียวกับแรงดังนั้น งานเล็กๆ จึงมีค่าเท่ากับ

$$dU_e = Fdx$$

$$\int dU_e = \int Fdx$$

$$U_e = \int Fdx \quad \text{.....6.3}$$

ถ้าแรง F เพิ่มขึ้นจนมีค่าเท่ากับ P จะทำให้เกิดการโก่งตัวเท่ากับ Δ ตามกราฟระหว่าง F กับ x

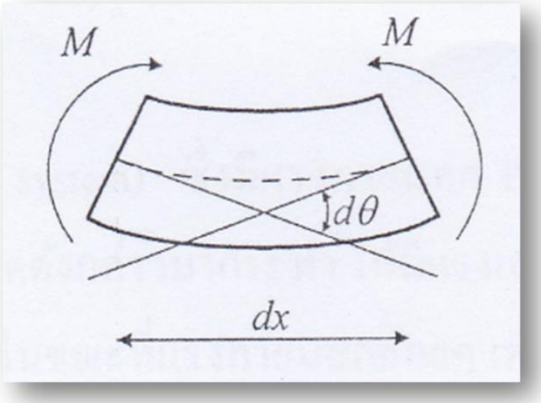
<u>จะได้</u> $\mathbf{U_e = \int_0^{\Delta} \frac{P}{\Delta} x dx}$

$$\mathbf{U_e = \frac{1}{2} P\Delta} \quad \text{.....6.4}$$

จากสมการ 6.4 คือพื้นที่สามเหลี่ยมส่วนที่แรเงาที่ได้จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงลบและการยืดตัวนั่นเอง และหากมีโมเมนต์ดัดขนาด M มากระทำต่อคานอย่างง่าย ทำให้เกิดการหมุนไป dθ จะได้ตามรูปที่ 2 และเมื่อพิจารณาชิ้นส่วน dx จะได้ว่า

$$\mathrm{dU_e = Md\theta}$$

$$\mathrm{U_e = \int_0^{\theta} Md\theta} \quad \text{.....6.5}$$



รูปที่ 2

6.2พลังงานความเครียด (Strain Energy)

เมื่อมีแรง F มากระทำย่อมทำให้เกิดแรงต้านภายใน ซึ่งมีขนาด N จากกฎของฮุค (Hooke's Law)

จาก $\varepsilon = \frac{\Delta}{L}$ และ $\sigma = \frac{N}{A}$

จะได้ $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{NL}{\Delta A}$

ดังนั้น $\Delta = \frac{NL}{EA}$ ……6.6

จาก $U_e = U_i$ เมื่อ $P = N$

จากสมการ $U_e = \frac{1}{2}P\Delta$

จะได้ $U_e = U_i = \frac{N}{2} \cdot \frac{NL}{EA}$

$U_i = \frac{N^2 L}{2AE}$ …….....6.7

ในทำนองเดียวกันกับ การเกิดโมเมนต์ ซึ่งจะทำให้เกิดโมเมนต์ดัดภายใน โดย

$d\theta = \frac{M}{EI} dx$

ดังนั้น $dU_i = \frac{M^2}{EI} dx$

เพราะฉะนั้น $U_i = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$ ……..6.8

6.3 วิธีงานเสมือน (Virtual Work Method)

สมมุติว่าคานนี้มีระยะโก่งเพิ่มขึ้นอีกเพียงเล็กน้อย โดยน้ำหนักหรือแรงกระทำยังคงเดิม ส่วนของระยะโก่งที่เพิ่มขึ้นอีกเพียงเล็กน้อยนี้คือ Δy_1 , Δy_2 และ Δy_n เรียกว่า การโก่งตัวเสมือน ซึ่งในระยะโก่งนี้ไม่เกิดขึ้นจริง

จากกฎอนุรักษ์พลังงาน

พลังงานภายนอก = พลังงานภายใน

$\therefore \quad \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} P_j \Delta_j + (1)(\Delta) = \frac{1}{2}\sum N \cdot \Delta + \sum u' \cdot \Delta$ ……6.9

เมื่อ N เป็นแรงต้านทานภายในโครงสร้าง ซึ่งเกิดจากแรงภายนอกชุด P

Δ เป็นส่วนยืดหดจากแรงภายนอก

u เป็นแรงต้านภายใน ซึ่งได้จากแรงเสมือน

หากพิจารณาเฉพาะการกระทำของ แรง P จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} P_j\Delta_j = \frac{1}{2}\sum N \cdot \Delta \quad \text{.....6.10}$$

ดังนั้น งานเสมือนซึ่งเกิดจากแรงเสมือน 1 หน่วย ได้จาก

$$(\mathbf{1})\Delta = \sum \mathbf{u} \cdot \Delta \quad \text{.....6.11}$$

สมการ 6.11 เป็นสมการเบื้องต้นของวิธีงานเสมือน เพื่อใช้หาการโก่งตัวของโครงสร้างแบบต่างๆ เมื่อรับน้ำหนักหรือแรงกระทำ โดยวิธีงานเสมือนบางครั้งอาจเรียกวิธีแรงหนึ่งหน่วย

ในทำนองเดียวกัน หากสมมติให้มีแรงคู่ควบเสมือนแรงหนึ่งหน่วย กระทำที่จุดและทิศทางที่ต้องการหาการหมุนหรือมุมลาดเอียงของโครงสร้างเมื่อรับน้ำหนักหรือแรงกระแทกกระทำจะได้สมการเบื้องต้นของวิธีงานเสมือนเพื่อหามุมลาดเอียง คือ

$$(1)(\theta) = \sum u \cdot \Delta \quad \text{.....6.12}$$

โดยที่ $\boldsymbol{\theta}$ การหมุนของโครงสร้าง หรือมุมลาดที่จุที่ต้องการหา

u แรงต้านภายใน ซึ่งเกิดจากแรงคู่ควบเสมือน

Δ ส่วนยืดหด ซึ่งเกิดจากแรงภายนอก

<u>6.4 งานเสมือนภายในโครงสร้าง(Virtual Work in Structure)</u>

6.4.1 แรงตามแนวแกน

พิจารณาชิ้นส่วนอันหนึ่งยาว L พื้นที่หน้าตัด A และมีโมดูลัสของการยืดหยุ่น E และ N เป็นแรงในแนวแกนของชิ้นส่วนซึ่งเกิดจากการกระทำของแรงภายนอก และ n เป็นแรงในแนวแกนของชิ้นส่วนซึ่งเกิดจากการกระทำของแรงแบบเสมือนหนึ่งหน่วยตรงจุดและในทิศทางที่ต้องการหาค่าการโก่งตัว

ดังนั้น $$\Delta = \frac{NL}{AE}$$

โดยที่ N เป็นแรงในแนวแกนซึ่งเกิดจากแรงภายนอก

L ความยาวของชิ้นส่วน

A พื้นที่หน้าตัด

E โมดูลัสของการยืดหยุ่น

จากสมการของงานเสมือนจะได้ $\Delta = \frac{NnL}{AE}$

โดยที่ n เป็นแรงตามแนวแกนซึ่งเกิดจากแรงเสมือน 1 หน่วยถ้ามีชิ้นส่วนรับแรงตามแนวแกน n ชิ้น

จะได้ $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k n_k L_k}{A_k E_K}$ 6.13

6.4.2 โมเมนต์ดัด

พิจารณาส่วนหนึ่ง dx ของชิ้นส่วนซึ่งมีความยาว L พื้นที่หน้าตัด A โมเมนต์อินนีเชีย I และโมดูลัสยืดหยุ่น E

ถ้า M เป็นโมเมนต์ดัดซึ่งเกิดจากการกระทำของแรงภายนอกและ m เป็นโมเมนต์ซึ่งเกิดจากการกระทำของแรงเสมือนหนึ่งหน่วยตรงจุดและในทิศทางที่ต้องการหาค่าการโก่งตัว

จากสูตรแรงดัดจะว่า $u = \frac{my}{I} dA$ และ $\Delta = \frac{My}{EI} dx$

จากสมการของงานเสมือนจะได้ $\Delta = \iiint_v \left(\frac{my}{I} dA\right)\left(\frac{My}{EI} dx\right)$

$= \int_0^L \frac{Mm}{EI^2} dx \int_A y^2 dA$

ดังนั้น $\Delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$ 6.14

6.4.3 แรงเฉือน

พิจารณาชิ้นส่วนหนึ่งที่มีความยาว dx ของชิ้นส่วนที่มีความยาว L พื้นที่หน้าตัด A โมดูลัสของการเฉือน G ถ้า V เป็นแรงเฉือนที่เกิดจากการกระทำของแรงภายนอก และ V เป็นแรงเฉือนที่เกิดจากการกระทำของแรงเสมือนหนึ่งหน่วย ตรงจุดและในทิศทางที่ต้องการหาค่าการโก่งตัว

ดังนั้น $u = \frac{V}{A}(dA)$ และ $\Delta L \frac{\lambda V}{AG} * dx$

เมื่อ λ = ตัวคูณประกอบซึ่งขึ้นอยู่กับรูตัดของชิ้นส่วนจากนั้นแทนค่าต่างๆในสมการของงานเสมือน

(1)(Δ) = $\iiint \frac{\lambda v V}{GA^2} dA * dx = \int_0^L \frac{\lambda V v}{GA} dx$ หรือ $\Delta = \int_0^L \frac{\lambda V v}{GA} dx$ 6.15

6.4.4 โมเมนต์บิด

พิจารณาชิ้นส่วนหนึ่งที่มีความยาว dx ของชิ้นส่วนที่มีความยาว L พื้นที่หน้าตัด A โมดูลัสของการเฉือน G และ K เป็นตัวคูณประกอบซึ่งขึ้นอยู่กับรูปตัดของชิ้นส่วน

ให้ T เป็นโมเมนต์บิด เนื่องจากแรงภายนอก และ t เป็นโมเมนต์บิด เนื่องจากแงเสมือนหนึ่งหน่วยที่กระทำตรงจุดและในทิศทางที่ต้องการหาค่าการโก่งตัว

ดังนั้น มุมบิด $\mathrm{d}\theta = \frac{T}{GK}dx$

จากสมการของงานเสมือนสามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$(1)(\Delta) = \int t * \mathrm{d}\theta = \int_0^L \frac{T}{GK}dx \quad \text{หรือ} \quad \Delta = \int_0^L \frac{Tt}{GK}dx \quad \ldots\ldots\ldots 6.16$$

สรุปได้ว่า

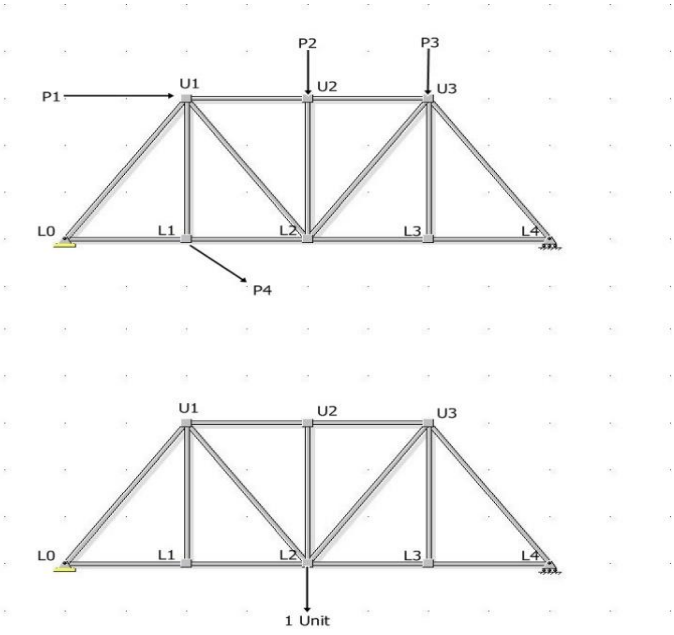
$$\Delta_{\text{ทั้งหมด}} = \Delta_{\text{แรงตามแนวแกน}} + \Delta_{\text{โมเมนต์ดัด}} + \Delta_{\text{แรงเฉือน}} + \Delta_{\text{โมเมนต์บิด}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k n_k L_k}{A_k E_K} + \int_0^L \frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{EI}}\mathrm{dx} + \int_0^L \frac{\lambda V v}{GA}dx + \int_0^L \frac{Tt}{GK}dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6.17$$

โดยการโก่งตัวอาจเกิดจากแรงแบบหนึ่งแบบใดหรือทั้งหมดขึ้นอยู่กับชนิดของโครงสร้างนั้นๆ

<u>6.5 การวิเคราะห์การโก่งตัวของโครงข้อหมุนโดยวิธีงานเสมือน</u>

หากต้องการหาระยะโก่งตัวในแนวดิ่งของจุดต่อ L ซึ่งเกิดจากการกระทำของแรงภายนอกชุด P ตามรูปด้านล่าง



เริ่มจากนำแรงเสมือนหนึ่งหน่วยมากระทำในแนวดิ่งที่จุด L ซึ่งจะทำให้เกิดแรงต้านทานภายใน (u) ในทุกๆชิ้นส่วนของโครง

หลังจากนั้นก็นำแรงหรือน้ำหนักชุด P ที่กำหนดให้ P_1 , P_2 , P_3, P_4 มากระทำให้เกิดการยืดหดตัว (ΔL) ในทุกๆชิ้นส่วนของโครงสร้างจากหลักการของงานเสมือนจะได้ว่า

ดังนั้น $(1)(\Delta) + W_R = \sum(u)\,(\Delta L)$

รูปที่ 3 การวิเคราะห์การโก่งตัวของโครงข้อหมุนโดยวิธีงานเสมือน

เมื่อ Δ = ระยะโก่งตัวในแนวดิ่ง ณ จุดที่ต้องการหา

W_R = งานเสมือนภายนอกซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่ของที่รองรับ

ΔL = ส่วนยืดหดตัวของแต่ละชิ้นส่วนนั้น นอกจากเกิดจากการกระทำของแรงหรือน้ำหนักภายนอกแล้ว ยังอาจเกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ (t) หรือเกิดจากข้อบกพร่องของการก่อสร้าง ดังนั้นสรุปได้ว่า

$$\Delta L = \frac{NL}{AE} + L\alpha t + \Delta L_{\text{จากการก่อสร้าง}}$$

โดยที่ N = แรงตามแนวแกนของแต่ล่ะชิ้นส่วน ซึ่งเกิดจากแรงภายนอกชุด P

L = ความยาวของแต่ล่ะชิ้นส่วน

α = สัมประสิทธิ์ของการขยายหรือหดตัวตามแนวแกนของวัสดุ

t = จำนวนอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลง

A = พื้นที่หน้าตัดของแต่ล่ะชิ้นส่วน

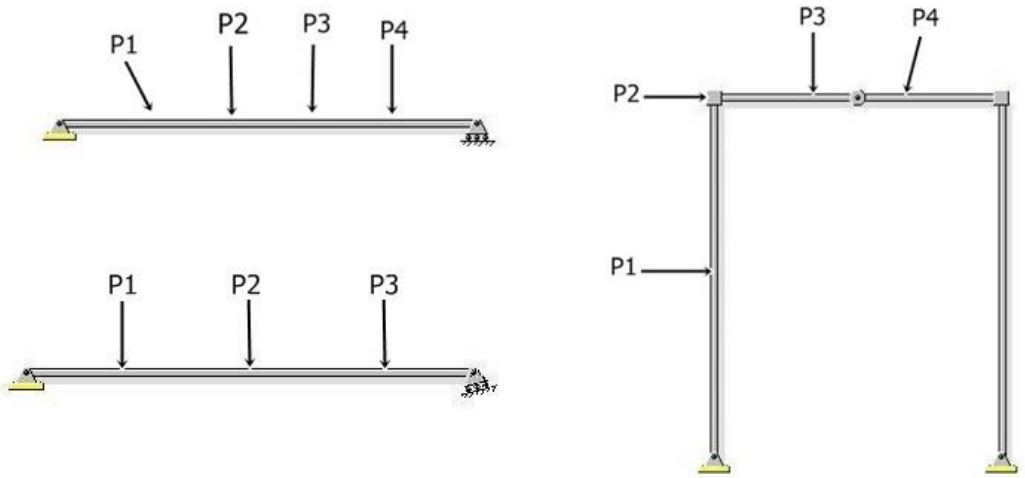
E = โมดูลัสยืดหยุ่นของชิ้นส่วน

เพราะฉะนั้นสมการทั่วไปที่ใช้หาการโก่งตัวของโครงสร้างของโครงข้อหมุน คือ

$$(1)(\Delta) + W_R = \sum(u)\ \frac{NL}{AE} + L\alpha t + \Delta L_{\text{จากการก่อสร้าง}} \quad \text{.....6.19}$$

<u>6.6การวิเคราะห์การโก่งตัวของคานโครงข้อแข็ง</u>

การโก่งตัวของโครงสร้างประเภทนี้ส่วนใหญ่จะเกิดเนื่องจากโมเมนต์ดัด โดยเกิดจากการกระทำของแรงภายนอกชุด P นอกจากนี้อาจเกิดการโก่งตัวเนื่องจากสาเหตุอื่นๆ เช่นแรงเฉือน แรงตามแนวแกน หรือการเปลี่ยนแปลงของ อุณหภูมิ เป็นต้น



รูปที่ 4 คานและโครงข้อแข็ง

จากหลักการของงานเสมือนจะได้สมการทั่วไปดังนี้

(1)(Δ) + W_R = + $\int_0^L \frac{Mm}{EI} dx + \int_0^L \frac{\lambda V v}{GA} dx + \sum(u)\,(\Delta L)$ ……..6.20

ในที่นี้ Δ = ระยะโก่งตัว ณ จุดและในทิศทางเดียวกันกับที่แรงเสมือนหนึ่งหน่วยกระทำ

M = โมเมนต์ดัดบนช่วงความยาวของแต่ล่ะชิ้นส่วนซึ่งเกิดจากแรงภายนอกชุด P

m = โมเมนต์ดัดบนช่วงความยาวของแต่ล่ะชิ้นส่วนซึ่งเกิดจากแรงเสมือนหนึ่งหน่วย

V = แรงเฉือนบนหน้าตัดของแต่ล่ะชิ้นส่วนซึ่งเกิดจากแรงภายนอกชุด P

v = แรงเฉือนบนหน้าตัดของแต่ล่ะชิ้นส่วนซึ่งเกิดจากแรงเสมือนหนึ่งหน่วย

ΔL = การยืดหดตัวของแต่ล่ะชิ้นส่วนเนื่องจากแรงภายนอก P และการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ = ($\frac{NL}{AE} + L\alpha t$)

I = โมเมนต์อินนีเชีย

G = โมดูลัสของการเฉือน = $\frac{E}{2(1+\mu)}$

μ = ปัวซองเรโช

<u>6.7 สรุปขั้นตอนการคำนวณโดยวิธีคานเสมือน</u>

1.วิเคราะห์การโก่งตัวของคาน $\Delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$

2.วิเคราะห์การหมุนหรือมุมลาดเอียงของโครงสร้าง $\theta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$

โดยที่ M = โมเมนต์ดัดจากแรงจริง

m = โมเมนต์ดัดจากแรง 1 หน่วย

หา Δ ที่จุดใดๆ 1.หา Reaction จากแรงจริง

2.หา M ที่เกิดจากแรงจริง

3.สมมติแรง 1 หน่วย กระทำที่จุดใดๆที่ต้องการหา Δ

4.หา Reaction จากแรง 1 หน่วย

5.หา m ที่เกิดจากแรง 1 หน่วย

6.แทนค่าในสมการหา Δ

หา $\boldsymbol{\theta}$ ที่จุดใดๆ 1.หา Reaction จากแรงจริง

2.หา M ที่เกิดจากแรงจริง

3.สมมติโมเมนต์ 1 หน่วย กระทำที่จุดใดๆที่ต้องการหา $\boldsymbol{\theta}$

4.หา Reaction จากแรง 1 หน่วย

5.หา m ที่เกิดจากแรง 1 หน่วย

6.แทนค่าในสมการหา $\boldsymbol{\theta}$

3.วิเคราะห์การโก่งตัวของโครงข้อหมุน

3.1 หาแรงปฏิกิริยาและแรงภายในชิ้นส่วนทุกชิ้นที่เกิดจากแรงจริง

3.2 สมมติแรงหนึ่งหน่วยกระทำที่จุดที่ต้องการหาการโก่งตัว

3.3 หาแรงปฏิกิริยาและแรงภายในชิ้นส่วนทุกชิ้นที่เกิดจากการโก่งตัว

3.4 หาค่าการโก่งตัวจากสมการ $\Delta = \frac{\mathrm{NnL}}{\mathrm{AE}}$

6.8วิธีคาสติกลิอาโน (Castigliano Method)

คาสติกลิอาโนได้เสนอทฤษฎีวิเคราะห์โครงสร้างสองทฤษฎี โดยทฤษฎีแรกจะใช้หาน้ำหนักที่มากระทำต่อโครงสร้างเมื่อทราบการโก่งตัวแต่ไม่เป็นที่นิยมเพราะในการทำงานจริงน้ำหนักที่มากระทำต่อโครงสร้างสามารถหาได้ก่อน และทฤษฎีที่สองจะใช้หาระยะโก่งตัวและการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้าง ซึ่งทฤษฎีที่สองนี้ได้ถูกประยุกต์เป็น ทฤษฎีของงานน้อยที่สุด (Theorem of least work)โดยทฤษฎีที่สองได้กล่าวไว้ว่า ในระบบอีลาสติก ค่าของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของพลังงานสะสมภายในที่เทียบกับแรงกระทำ ณ จุดใดๆ มีค่าเท่ากับการโก่งตัว ณ จุดนั้น ในแนวและทิศทางที่แรงนั้นกระทำ

โดยในการพิสูจน์สมมติให้แรงชุด P($\mathrm{P_1, P_2, P_3}$) กระทำบนคานช่วงเดียว AB และให้ Δ_1, Δ_2 และ Δ_3 เป็นระยะโก่งตัวที่จุด 1,2 และ 3 ตามลำดับ

ดังนั้นพลังงานภานนอกเนื่องจากแรงชุดP คือ W=$\frac{1}{2}\mathrm{P_1}\Delta_1 + \frac{1}{2}\mathrm{P_2}\Delta_2 + \frac{1}{2}\mathrm{P_3}\Delta_3$

ถ้าที่จุด 1 มีน้ำหนักกระทำเพิ่มขึ้นอีก d$\mathrm{P_1}$ ระยะโก่งตัวที่จุก 1,2 และ 3 จะเพิ่มขึ้นอีก d$\Delta_1, \mathrm{d}\Delta_3$และ d$\Delta_3$ ตามลำดับ

พลังงานภายนอกที่เพิ่มขึ้น dW=$\frac{1}{2}\mathrm{dP_1}\cdot\mathrm{d}\Delta_1 + \mathrm{P_1}\cdot\mathrm{d}\Delta_1 + \mathrm{P_2}\cdot\mathrm{d}\Delta_2 + \mathrm{P_3}\cdot\mathrm{d}\Delta_3$

∴ พลังงานภายนอกทั้งหมด = W+dW

$= \frac{\mathrm{P_1}\cdot\Delta_1}{2} + \frac{\mathrm{P_2}\cdot\Delta_2}{2} + \frac{\mathrm{P_3}\cdot\Delta_3}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{dP_1}\cdot\mathrm{d}\Delta_1 + \mathrm{P_1}\cdot \mathrm{d}\Delta_1 + \mathrm{P_2}\cdot\mathrm{d}\Delta_2 + \mathrm{P_3}\cdot\mathrm{d}\Delta_3$

หากสมมติว่า น้ำหนัก ($\mathrm{P_1} + \mathrm{dP_1}$),$\mathrm{P_2}$ และ $\mathrm{P_3}$กระทำพร้อมกันที่จุด 1,2 และ 3 ตามลำดับจะได้ว่า

พลังงานภายนอก =$\frac{1}{2}(\mathrm{P_1} + \mathrm{dP_1})(\Delta_1 + \mathrm{d}\Delta_1) + \frac{1}{2}(\mathrm{P_2})(\Delta_2 + \mathrm{d}\Delta_1) + \frac{1}{2}(\mathrm{P_3})(\Delta_3 + \mathrm{d}\Delta_3)$

∴ จะได้ว่า$\frac{1}{2}\mathrm{P_1}\cdot\mathrm{d}\Delta_1 + \frac{1}{2}\mathrm{P_2}\cdot\mathrm{d}\Delta_2 + \frac{1}{2}\mathrm{P_3}\cdot\mathrm{d}\Delta_3 = \frac{1}{2}\mathrm{dP_1}\cdot\Delta_1$

หรือ $\mathrm{P_1}\cdot\mathrm{d}\Delta_1 + \mathrm{P_2}\cdot\mathrm{d}\Delta_2 + \mathrm{P_3}\cdot\mathrm{d}\Delta_3 = \mathrm{dP_1}\cdot\Delta_1$

นั่นคือ dW=d$\mathrm{P_1}\cdot\Delta_1$

และจาก dW=dU

จะได้ว่า dU=d$\mathrm{P_1}\cdot\Delta_1$

ดังนั้น $\frac{\partial U}{\partial P_1} = \Delta_1$ (ซึ่งสมการนี้คือทฤษฎีที่สองของคาสติกลิอาโน) ....(6.21)

ในทำนองเดียวกัน หากต้องการหาการหมุน (Rotation) ที่จุดใด ก็ทำได้โดยการให้โมเมนต์ดัด M_1 กระทำเพิ่มขึ้นที่จุดนั้น พิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{\partial U}{\partial M_1} = \theta_1 \quad .....(6.22)$$

โดยทฤษฎีที่สองของคาสติกลิกาโนได้รับความนิยมในการใช้งาน และใช้ในการเรียนของบทนี้ด้วย อย่างไรก็จามสามารถสรุปทฤษฎีทั้งสองข้อและการประยุกต์ทฤษฎีของคาสติกลิกาโนได้ดังนี้

6.8.1 ทฤษฎีที่หนึ่งของคาสติกลิอาโน (Theorem I)

ทฤษฎีที่หนึ่งของคาสติกลิอาโนกล่าวไว้ว่าในโครงสร้างอีลาสติกซึ่งอยู่ในสมดุล ขนาดของแรงภายนอกแรงใดแรงหนึ่งที่กระทำต่อโครงสร้างนั้นจะมีค่าเท่ากับอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของพลังงานความเครียดทั้งหมดที่สะสมในโครงสร้างเทียบกับการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่จุดที่แรงนั้นกระทำในทิศทางเดียวกัน

$$P_n = \frac{\partial U}{\partial \Delta_n} \quad ....(6.23)$$

โดยที่ P_n = แรงภายนอกกระทำที่ตำแหน่ง n

U = พลังงานความเครียดที่สะสมในโครงสร้าง

Δ_n = การเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement) ที่ตำแหน่ง n ในทิศทางของ P_n

6.8.2ทฤษฎีที่สองของคาสติกลิอาโน (Theorem II)

ทฤษฎีที่สองของคาสติกลิอาโนกล่าวไว้ว่าในโครงสร้างอีลาสติกซึ่งอยู่ในสมดุล การเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดใดจุดหนึ่งของโครงสร้างเทียบกับขนาดของแรงภายนอกที่กระทำที่จุดนั้นในทิศทางเดียวกัน

$$\Delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} \quad ...(6.24)$$

6.8.3ทฤษฎีของงานน้อยที่สุด (Theorem of Least Work)

ทฤษฎีของงานน้อยที่สุดในโครงสร้างอีลาสติกที่เป็นแบบอินดีเทอร์มิเนตทางสถิตยศาสตร์ ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ รูปแบบของแรงส่วนเกินและแรงภายในที่อยู่ในสมดุลกันที่อาจเป็นไปได้นั้นรูปแบบของแรงส่วนเกินซึ่งให้ความสอดคล้องทางเรขาคณิตด้วยนั้น ต้องทำห้พลังงานความเครียดมีค่าน้อยที่สุด

$$\Delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} = 0 \quad ...(6.25)$$

ทฤษฎีของงานน้อยที่สุด เป็นการปะยุกต์ทฤษฎีที่สองของคาสติกลิอาโน และนำมาใช้สำหรับวิเคราะห์โครงสร้างอินดีเทอร์มิเนตเท่านั้น

6.9 พลังงานความเครียดในโครงสร้าง (Strain Energy in Structure)

เมื่อวัตถุถูกแรงภายนอกมากระทำจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างและจะเกิดพลังงานสะสมอยู่ภายในอันเป็นผลมาจากแรงภายใน (ซึ่งสมดุลกับแรงภายนอก) พลังงานนี้เรียกว่า พลังงานภายใน ถ้าวัตถุมีการ

เคลื่อนที่ภายในจะประกอบด้วยพลังงานสองชนิดคือ พลังงานจลน์และพลังงานความเครียด จากหลักการพลังงานไม่มีการสูญหายหรือหลักการอนุรักษ์พลังงานสามรถเขียนได้ในรูปสมการ

$$\mathbf{W = T + U}$$

โดยที่ W = งานภายนอก

T = พลังงานจลน์

U = พลังงานความเครียด

ในกรณีวัตถุอยู่ในสถิตยศาสตร์ จะได้ว่า T = 0 นั่นคือ W = U

พลังงานความเครียดที่เกิดขึ้นภายในโครงสร้างตามหลักการของคาสติกลีอาโนสามารถแบ่งประเภทออกได้ตามชนิดของแรงภายในที่ทำให้เกิดพลังงานนั้นได้แก่

6.9.1 แรงตามแนวแกน

ถ้าส่วนเล็กๆยาว dx ของชิ้นส่วนซึ่งมีความยาว L โมดูลัสของการยืดหยุ่น E พื้นที่หน้าตัด A และรับแรงกระทำตามแนวแกน N

ให้ ΔL เป็นส่วนยืดหรือหดตัวของชิ้นส่วน dx ในทิศทางของแรง N ที่กระทำ

พลังงานความเครียด $dU = N\frac{\Delta L}{2}$

แต่ $\Delta L = \frac{Ndx}{AE}$

ดังนั้น $dU = \frac{N^2}{2AE}dx$

พลังงานความเครียดทั้งหมด $U = \int_0^L \frac{N^2}{2AE}dx = \frac{N^2}{2AE}$

จาก $\Delta_N = \frac{\partial U}{\partial P_N}$

จะได้ว่า $\Delta = \int_0^L \frac{(\frac{\partial N}{\partial P})}{AE}dx$

หรือ $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k(\frac{\partial N_k}{\partial P})L}{AE}$ _____(6.26)

6.9.2 โมเมนต์ดัด

ถ้าส่วนเล็กๆยาว dx ของชิ้นส่วนซึ่งมีความยาว L รับโมเมนต์ดัด M ทำให้ชิ้นส่วนนี้โก่งเป็นมุม $d\propto$

พลังงานความเครียด $dU = M\frac{d\propto}{2}$

แต่ มุม $d\propto = \frac{M}{EI}dx$

ในเมื่อ E คือโมดูลัสยืดหยุ่นของชิ้นส่วน

และ I คือโมเมนต์อินเนอร์เชียร์ของหน้าตัดรอบแกนที่รับโมเมนต์ดัด

แทนค่าจะได้ $dU = \frac{M^2}{2EI}dx$

พลังงานความเครียด $U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$

จาก $\Delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n}$

ดังนั้นจะได้ว่า $\Delta = \int_0^L \frac{M(\frac{\partial M}{\partial P})}{EI} dx$ _____(6.27)

6.2.3 แรงเฉือน

ถ้าส่วนเล็กๆยาว dx ของชิ้นส่วนซึ่งมีความยาว L พื้นที่หน้าตัด A รับแรงเฉือน V ทำให้ชิ้นส่วนนี้ยืดหรือหดตามแนวแรงเฉือนเป็นระยะ de

พลังงานความเครียด $dU = V\frac{de}{2}$

แต่ $de = \frac{\lambda V^2}{AG} dx$

ในเมื่อ G เป็นโมดูลัสของการเฉือน

และ λ เป็นคูณประกอบ *(*Form Factor*)*

แทนค่าจะได้ $dU = \frac{\lambda V^2}{2AG} dx$

พลังงานความเครียดทั้งหมด $U = \int_0^L \frac{\lambda V^2}{2AG} dx$

จาก $\Delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n}$

จะได้ว่า $\Delta = \int_0^L \frac{\lambda V(\frac{\partial V}{\partial P})}{AG} dx$ _____(6.28)

6.9.4 โมเมนต์บิด

ถ้าส่วนเล็กๆยาว dx ของชิ้นส่วนซึ่งมีความยาว L รับโมเมนต์บิด T ทำให้มุมบิดไป dλ

พลังงานความเครียด $dU = \frac{T}{2} d\lambda$

แต่ $d\lambda = \frac{T}{GK} dx$

ในเมื่อ G เป็นโมดูลัสของการเฉือน

และ K เป็นสติฟเนสของการบิดของหน้าตัด

แทนค่าจะได้ $dU = \frac{T^2}{2GK} dx$

พลังงานความเครียดทั้งหมด $U = \int_0^L \frac{T^2}{2GK} dx$

จาก $\Delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n}$

จะได้ว่า $\Delta = \int_0^L \frac{T(\frac{\partial T}{\partial P})}{GK} dx$ _____(6.29)

จากหัวข้อ 6.9.1-6.9.4 สามารถสรุปได้ดังนี้

$$\Delta_{\text{ทั้งหมด}} = \Delta_{\text{แรงตามแนวแกน}} + \Delta_{\text{โมเมนต์ดัด}} + \Delta_{\text{แรงเฉือน}} + \Delta_{\text{โมเมนต์บิด}}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k(\frac{\partial n_k}{\partial P})L}{AE} + \int_0^L \frac{M(\frac{\partial ?}{\partial P})}{EI} dx + \int_0^L \frac{\lambda V(\frac{\partial V}{\partial P})}{AG} dx + \int_0^L \frac{T(\frac{\partial T}{\partial P})}{GK} dx$$ _____(6.30)

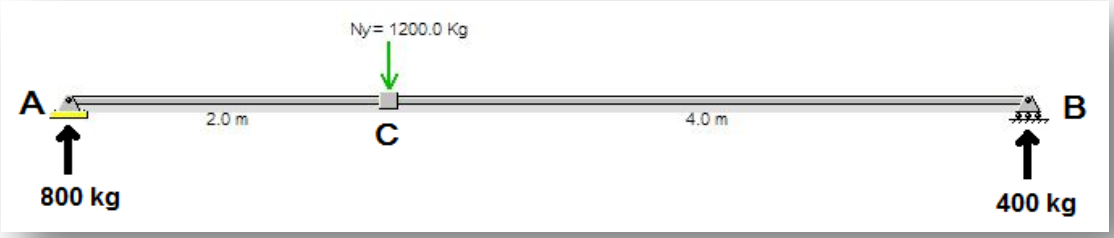
<u>6.10 สรุปขั้นตอนการวิเคราะห์การโก่งตัวของคานโดยวิธีคาสติกลิอาโน่</u>

การวิเคราะห์การโก่งตัวโดยวิธีคาสติกลิอาโน่มีหลักการคล้าย ๆ กับวิธีงานเสมือน แต่ต่างกันคือวิธีคาสติกลิอาโน่จะใส่แรง P หรือโมเมนต์ดัด M ณ ตำแหน่งที่ต้องการทราบการโก่งตัวหรือมุมเบี่ยงเบนในโครงสร้างจริงที่มีแรงภายนอกมากระทำโดยที่ P = M = 0 และ $\Delta = \int_0^L \frac{M(\partial M/\partial P)}{EI} dx$ ดังนั้นค่าที่ต้องการหาคือ M และ $\frac{\partial M}{\partial P}$ โดยวิธีคาสติกลิอาโน่จะแตกต่างกับวิธีงานเสมือนคือวิธีงานเสมือนจะแยกน้ำหนักออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกจะเป็นน้ำหนักที่กระทำจริง ส่วนที่สองจะเป็นน้ำหนักหนึ่งหน่วย สำหรับวิธีคาสติกลิอาโน่จะรวมน้ำหนักกระทำจริงและสมมติไว้ในโครงสร้างเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1

จงหา θ_A , θ_B ของโครงสร้างในรูปโดยวิธีงานเสมือน

- หาแรงปฏิกิริยาจากแรงจริง



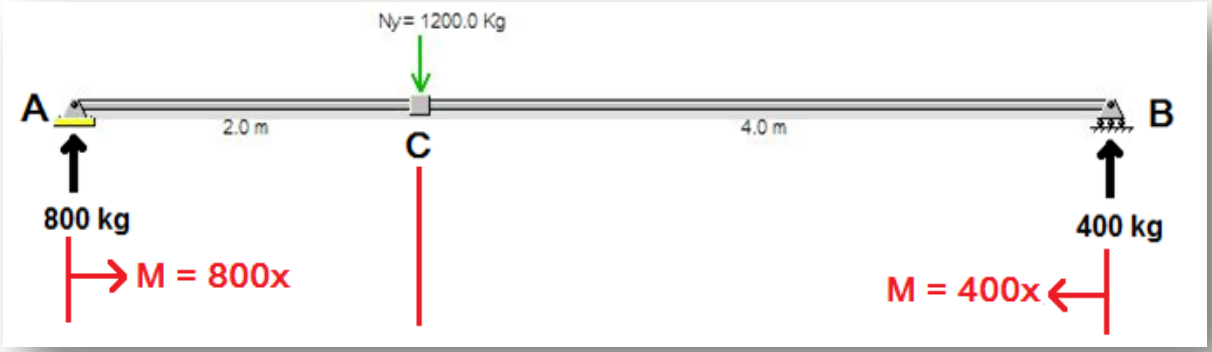
$$\sum M_A = 0; \;\; 6\,R_B = 1200 \times 2$$

$$R_B = 400\ \text{Kg}$$

$$\sum F_y = 0; \;\; R_A + 400 = 1200$$

$$R_A = 800\ \text{Kg}$$

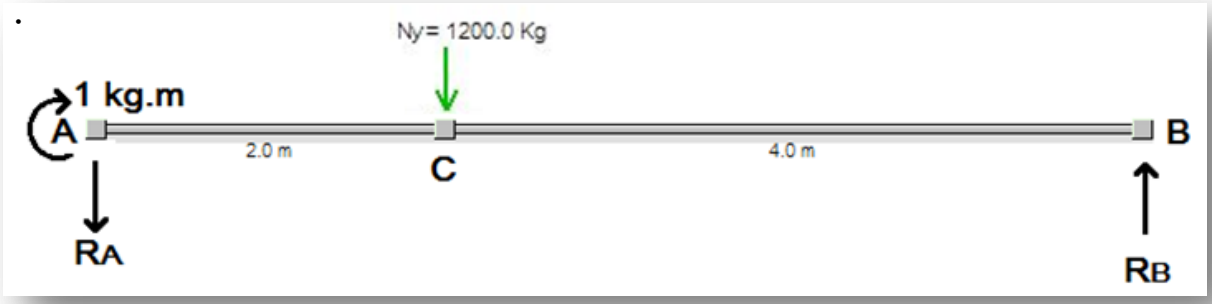
- **หาโมเมนต์ดัดจากแรงจริง (M)**



พิจารณา A-C **พิจารณา B-C**

$$M = 800x \qquad M = 400x$$

- หา θ_A ให้สมมติโมเมนต์ 1 หน่วย กระทำที่จุด A ทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังรูป

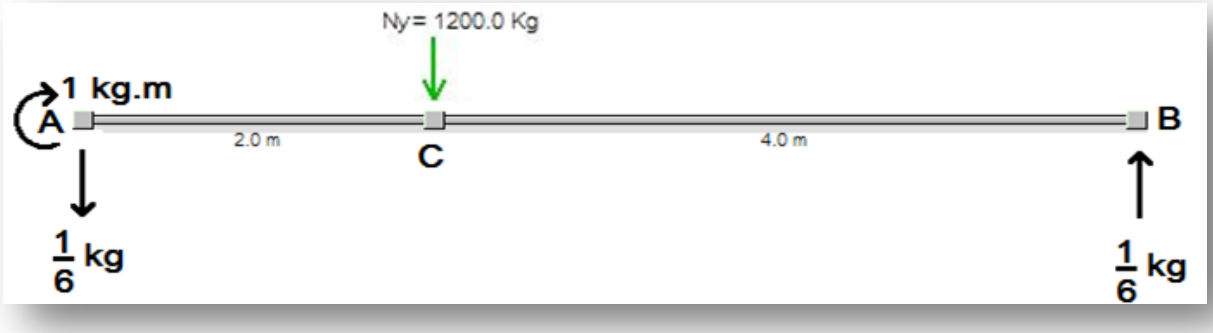


- **หาแรงปฏิกิริยาจากแรง 1 หน่วย**

$$\sum M_A = 0\,;\ 6R_B = 1$$

$$R_B = \frac{1}{6}\ \text{kg}$$

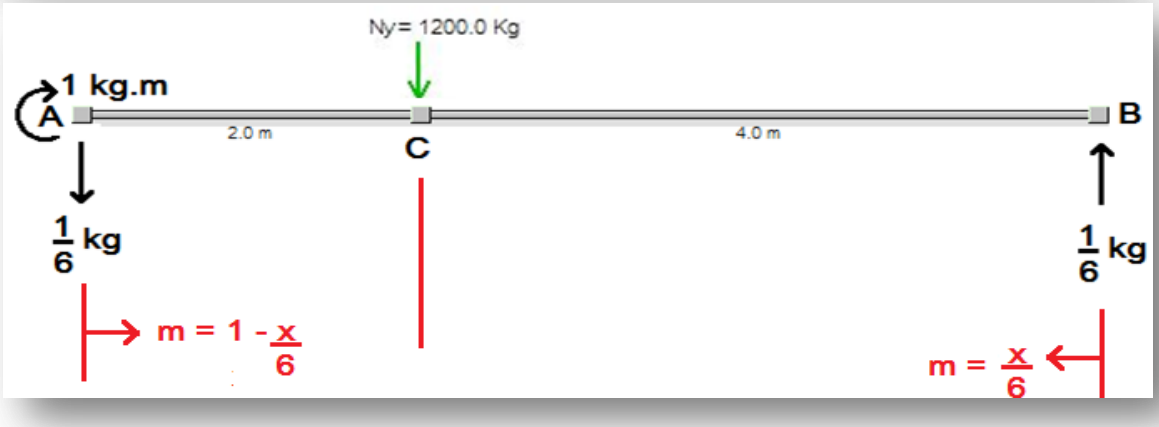
$$\sum F_y = 0;\ R_A = \frac{1}{6}\ \text{kg}$$



- หาโมเมนต์ดัดที่เกิดจากแรง 1 หน่วย (m) ที่จุด A ทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังรูป

พิจารณา A-C $m = 1 - \frac{x}{6}$

พิจารณา B-C $m = \frac{x}{6}$



จากสมการ $\theta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\left(\int_0^2 (800X)\left(1-\frac{x}{6}\right)dx + \int_0^4 (400x)\left(\frac{x}{6}\right)dx\right)$$

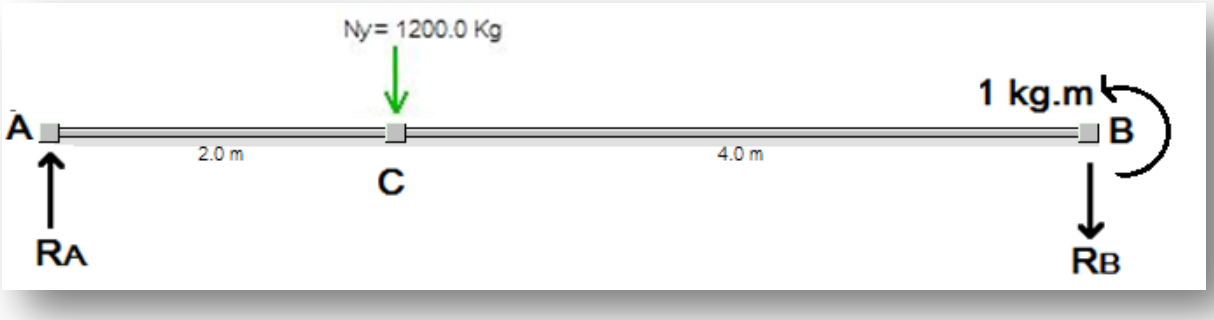
$$= \frac{1}{EI}\left(\int_0^2 \left(800x - \frac{800(x^2)}{6}\right)dx + \int_0^4 \left(\frac{400(x^2)}{6}\right)dx\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\left(\frac{800(x^2)}{2} - \frac{800(x^3)}{18}\right)\Big|_0^2 + \frac{400(x^3)}{18}\Big|_0^4\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(1600 - 355.56 + 1422.22\right)$$

$$= \frac{2666.66}{EI}$$

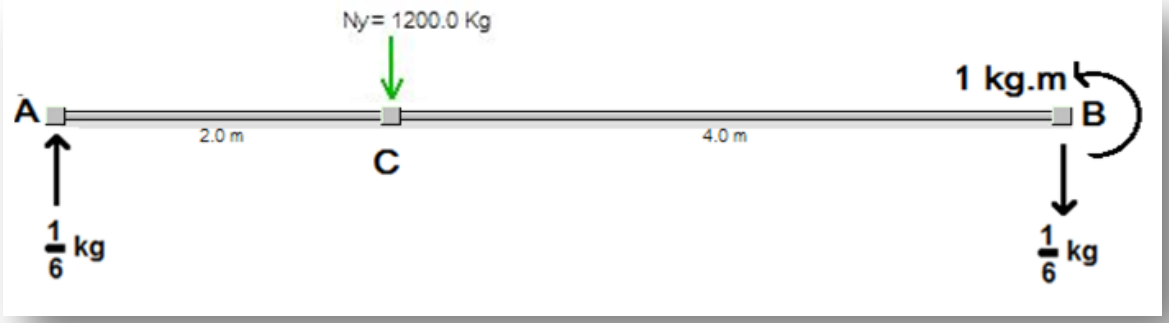
- หา θ_B ให้สมมติโมเมนต์ 1 หน่วย กระทำที่จุด B ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป



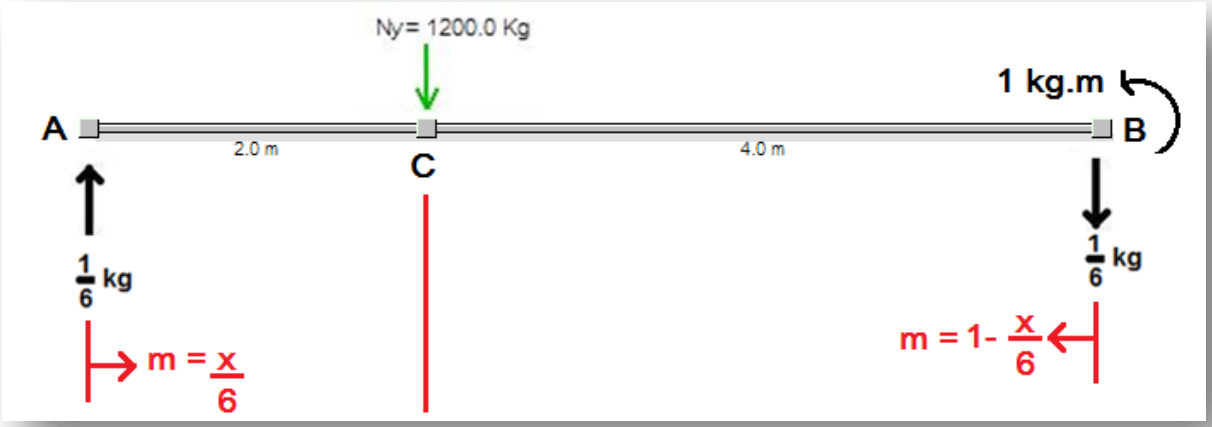
$$\sum M_B = 0;\ 6R_A = 1$$

$$R_A = \frac{1}{6}\ kg$$

$$\sum F_y = 0;\ R_B = \frac{1}{6}\ kg$$

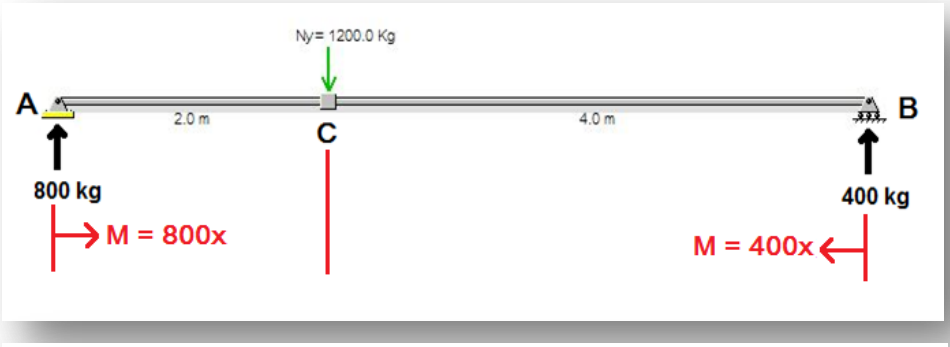


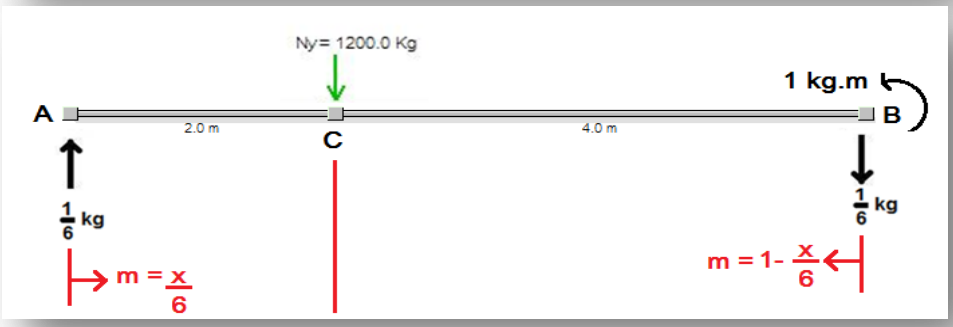
- หาโมเมนต์ดัดที่เกิดจากน้ำหนัก 1 หน่วย (m) ที่ B ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป



พิจารณา B-C $$m = 1 - \frac{x}{6}$$

พิจารณา A-C $$m = \frac{x}{6}$$





จากสมการ $\theta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left[\int_0^2 (800x)\left(\frac{x}{6}\right)dx + \int_0^4 (400x)\left(1-\frac{x}{6}\right)dx\right]$$

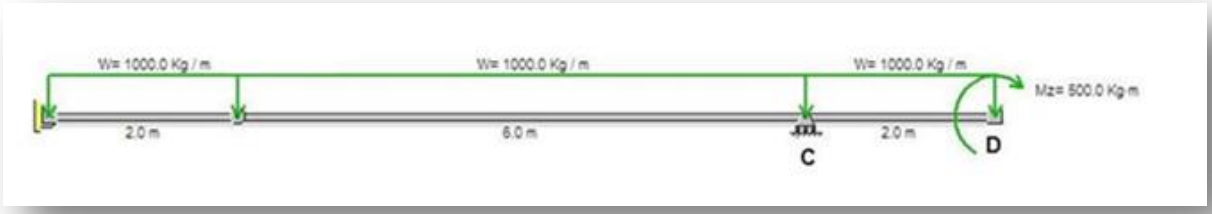
$$= \frac{1}{EI}\left[\int_0^2 \frac{800(x^2)}{6}dx + \int_0^4 \left(400x - \frac{400(x^2)}{6}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{800(x^3)}{18}\Big|_0^2 + \left(\frac{400(x)^2}{2} - \frac{400(x^3)}{18}\right)\Big|_0^4\right]$$

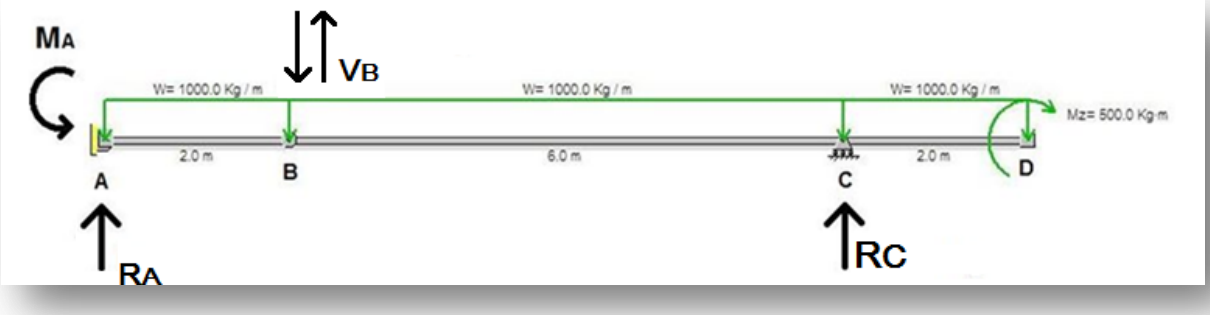
$$= \frac{1}{EI}(355.56 + 3200 - 1422.22)$$

$$= \frac{2133.34}{EI}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา Δ_D ของโครงสร้างในรูปโดยวิธีงานเสมือน



- หาแรงปฏิกิริยาจากแรงจริง



ชิ้น B-C-D

$$\sum M_B = o\ ;$$

$$6R_c = 500 + (\frac{1000(8^2)}{2})$$

$$R_C = 5416.67\ kg$$

$$\sum F_y = o\ ;$$

$$V_B + 5416.67 = 1000 \times 8$$

$$V_B = 2583.33\ kg$$

พิจารณาทั้งระบบ

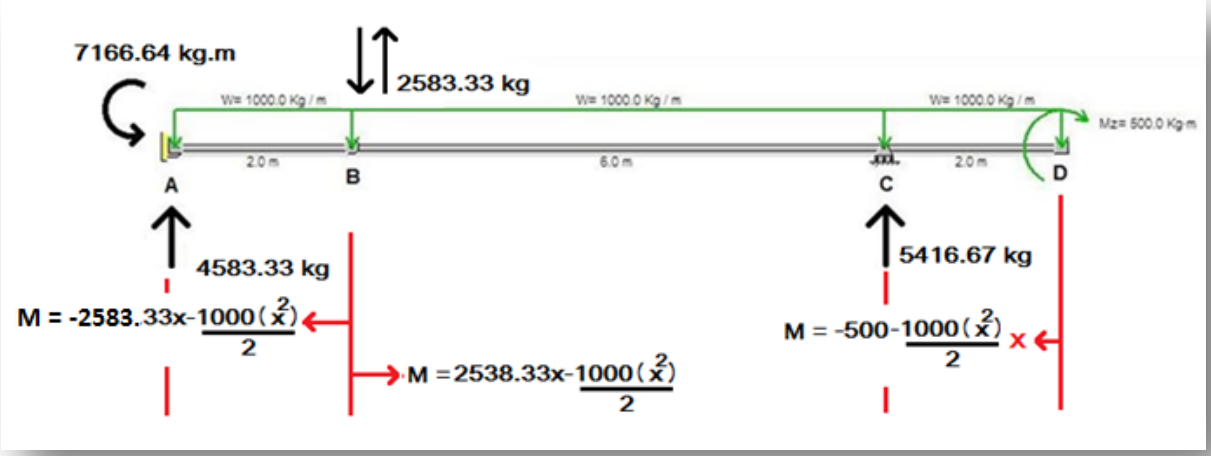
$$\sum M_A = 0;\ M_A + (5416.67 \times 8) = 500 + (\frac{1000(10^2)}{2})$$

$$M_A = 7166.64\ kg.m$$

$$\sum F_y = 0;\ R_A + 5416.67 = 1000 \times 10$$

$$R_A = 4583.33kg$$

- หาโมเมนต์ดัดจากแรงจริง



พิจารณา B-A

$$M = -2583.33x - \frac{1000(x^2)}{2}$$

พิจารณา B-C

$$M = 2538.33x - \frac{1000(x^2)}{2}$$

พิจารณา D-C

$$M = -500 - \frac{1000(x^2)}{2}$$

- หา Δ_D ให้สมมติแรง 1 หน่วย กระทำที่จุด D ทิศลง ดังรูป

ชิ้น B-C-D

$$\sum M_B = 0;\ 6R_C = 1 \times 8 \qquad \sum F_y = 0;\ V_B + 1 = 1.33$$

$$R_C = 1.33\ \text{kg} \qquad V_B = 0.33\ \text{kg}$$

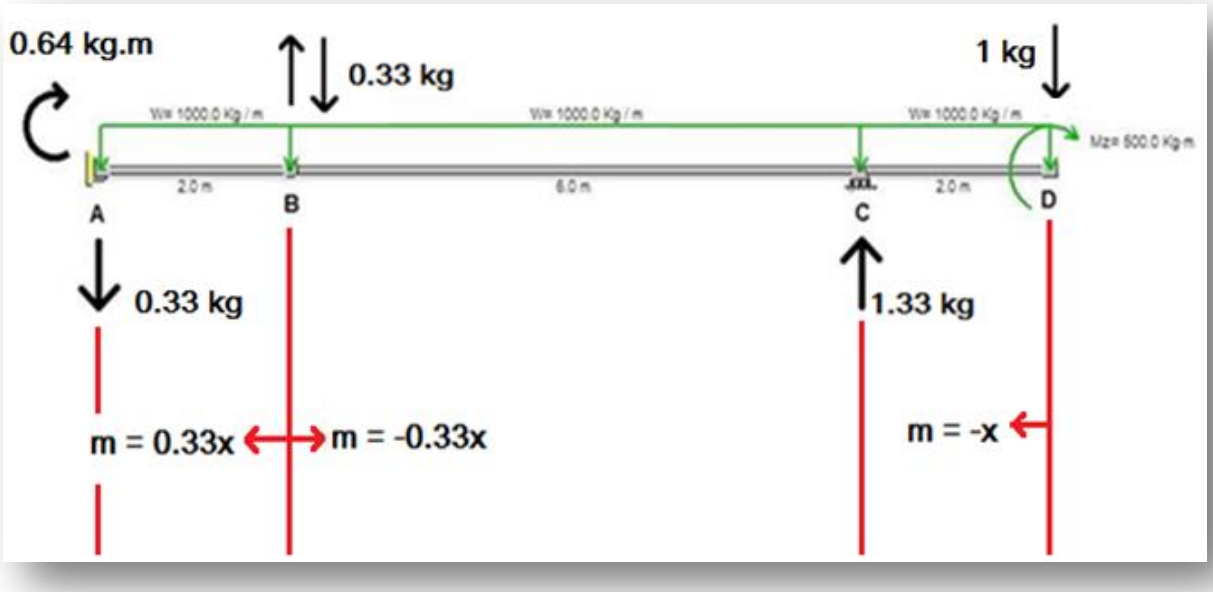
- หาแรงปฏิกิริยาจากแรง 1 หน่วย (ต่อ)

พิจารณาทั้งระบบ

$$\sum M_A = 0;\ M_A + (1 \times 10) = 1.33 \times 8 \qquad \sum F_y = 0;\ R_A + 1 = 1.33$$

$$M_A = 0.64\ \text{kg} \qquad R_A = 0.33\ \text{kg}$$

- หาโมเมนต์ดัดที่เกิดจากแรง 1 หน่วย (m) ที่ตำแหน่ง D มีทิศลง ดังรูป



พิจารณา B-A

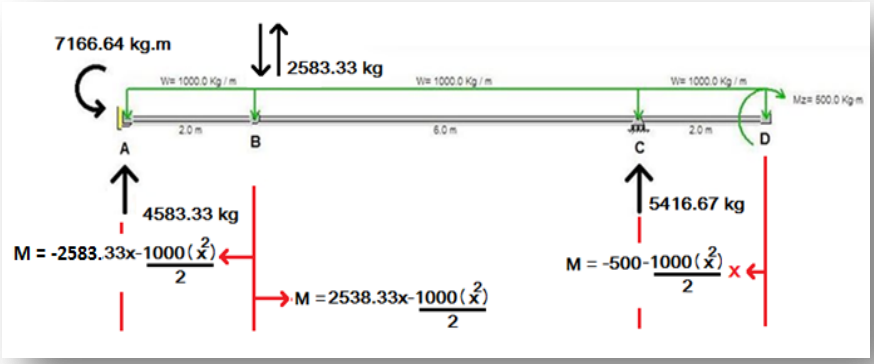
$$m = 0.33x$$

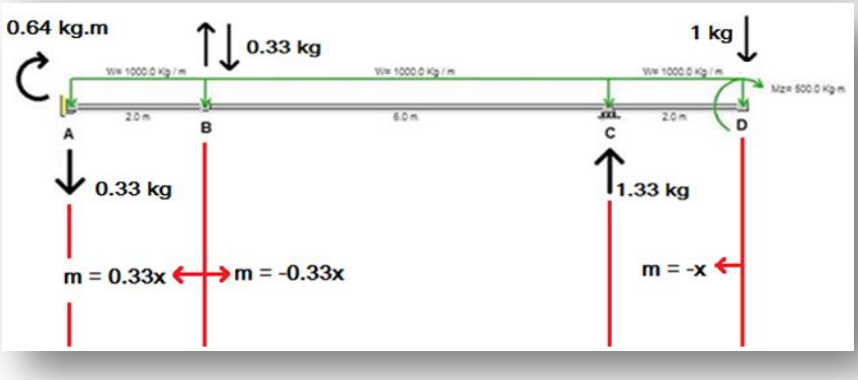
พิจารณา B-C

$$m = -0.33x$$

พิจารณา D-C

$$m = -x$$





จาก $\Delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$

$$\Delta_D = \frac{1}{EI}\left(\int_0^2 \left(-2583.33x - \left(500\left(x^2\right)\right)\right)(0.33x) + \int_0^6 \left(2583.33x - \left(500(x^2)\right)\right)(-0.33)dx + \int_0^2 \left(-500 - \left(500\left(x^2\right)\right)\right)(-x)dx\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\int_0^2 \left((-852.55(x^2)) - 165(x^3)\right)dx + \int_0^6 \left((-852.5(x^2)) + 165(x^3)\right)dx + \int_0^2 \left(500x + (500(x^3))\right)dx\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\int_0^2 \left((-852.5(x^2)) - 165(x^3)\right)dx + \int_0^6 \left((-852.5(x^2)) + 165(x^3)\right)dx + \int_0^2 \left(500x + (500(x^3))\right)dx\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\left(\frac{-852.5(X^3)}{3} - \frac{165(X^4)}{4}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{-852.5(X^3)}{3} + \frac{165(X^4)}{4}\right)\Bigg|_0^6 + \frac{500(X^2)}{2} + \frac{500(X^4)}{4}\Bigg|_0^2\right)$$

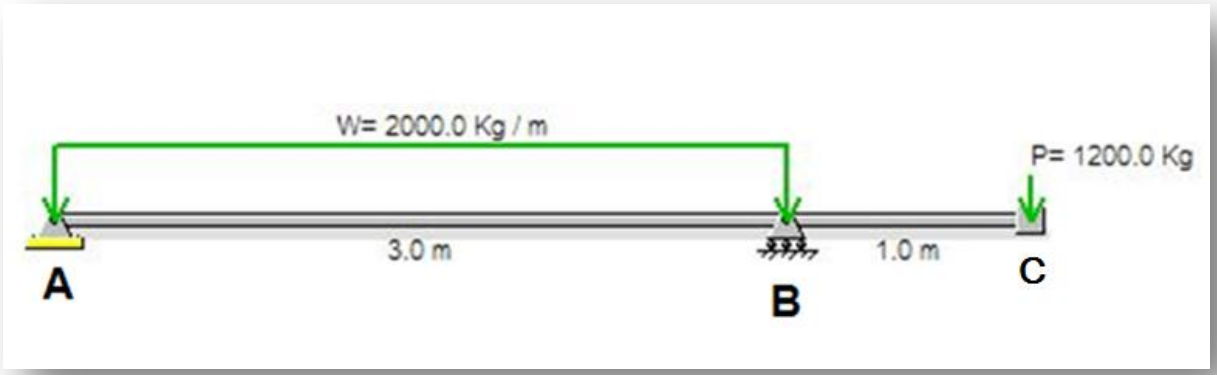
$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{-837.65(2^3)}{3} - \frac{165(2^4)}{4} + \frac{-837.65(6^3)}{3} + \frac{165(6^4)}{4} + \frac{500(2^4)}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{EI}(-2272 - 660 - 61380 + 53460 + 1000 + 2000)$$

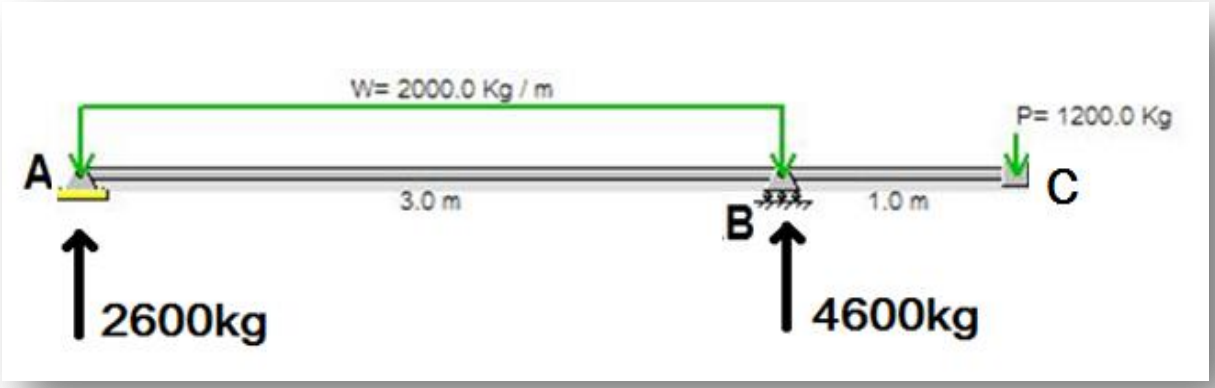
$$\Delta_D = \frac{-7852}{EI} = \frac{7852}{EI}$$

ตัวอย่างที่ 3

จงหา $\triangle c$ ของโครงสร้างในรูปโดยวิธีงานเสมือน



- **หาแรงปฏิกิริยาจากแรงจริง**



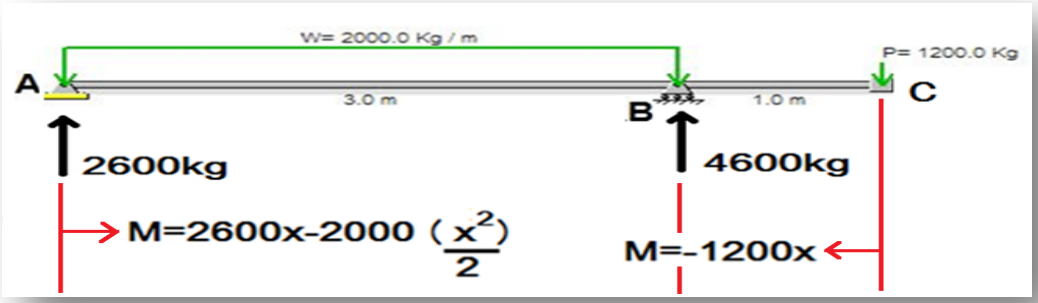
$$\sum \mathbf{M_A = 0\,;\ (1200 \times 4) - 3B_y + (2000 \times 3 \times 1.5) = 0}$$

$$\mathbf{B_y = 4600\ kg}$$

$$\sum \mathbf{F_y = 0\,;4600 + A_y - 1200 - (2000 \times 3) = 0}$$

$$\mathbf{A_y = 2600\ kg}$$

- หาโมเมนต์ดัดจากแรงจริง (M)



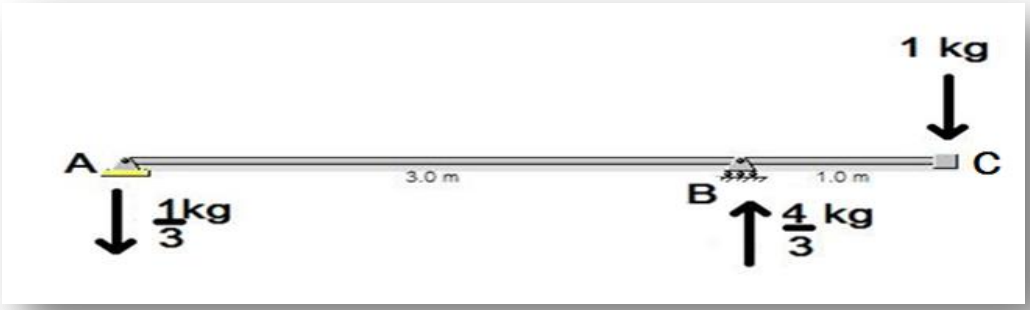
พิจารณา C-B

$$M = -1200x$$

พิจารณา A-B

$$M = (2600x) - 2000(\frac{x^2}{2})$$

- หา Δ_C ให้สมมติแรง1 หน่วย กระทำที่จุด C ทิศลง ดังรูป



- หาแรงปฏิกิริยาจากแรง 1 หน่วย

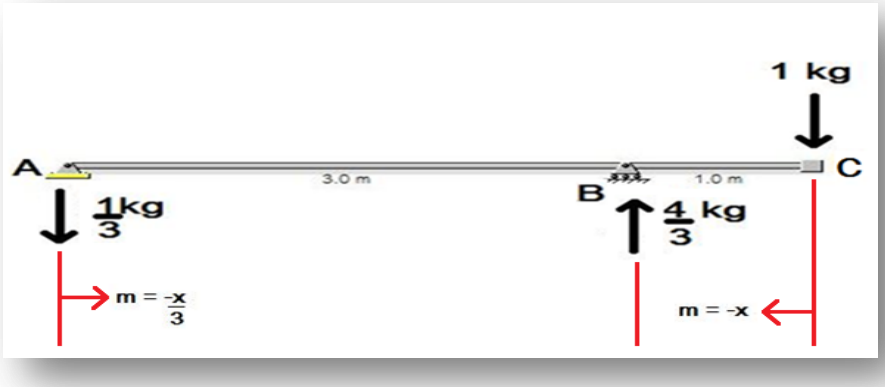
$$\sum M_A = 0 \; ; -3B_y + 1 \times 4 = 0$$

$$B_y = \frac{4}{3} \text{ kg}$$

$$\sum F_y = 0 \; ; \frac{4}{3} + A_y - 1 = 0$$

$$A_y = \frac{1}{3} \text{ kg}$$

- หาโมเมนต์ดัดที่เกิดจากแรง 1 หน่วย (m) ที่จุด C ทิศลงดังรูป

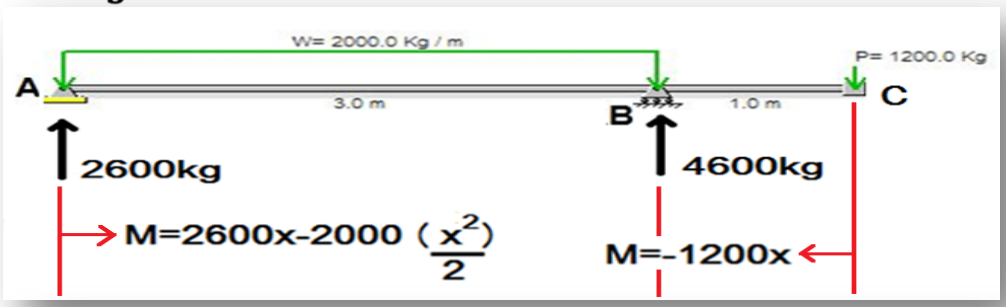


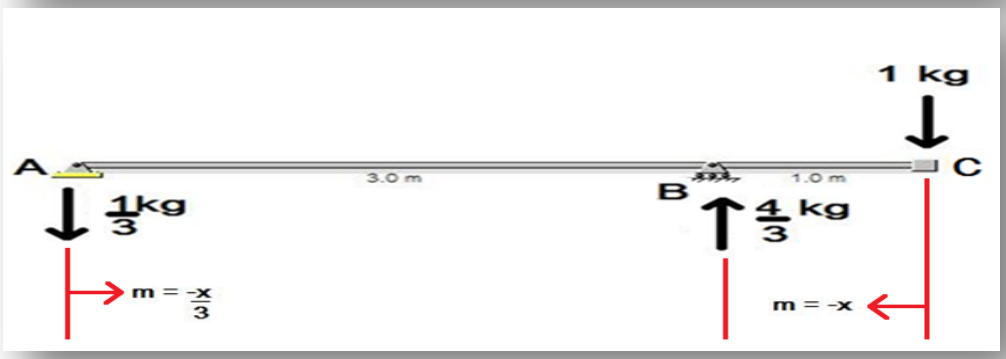
พิจารณาA-B

$$m = \frac{-x}{3}$$

พิจารณาC-B

m = -x





$$\text{จาก} \Delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\Delta c = \frac{1}{EI}\left(\int_0^3 \left(2600x - 2000\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)\left(\frac{-x}{3}\right)dx + \int_0^1 -1200x(-x)dx\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\int_0^3 \frac{-2600(X^2)}{3} + \frac{1000(X^3)}{3}dx + \int_0^1 1200x^2dx\right)$$

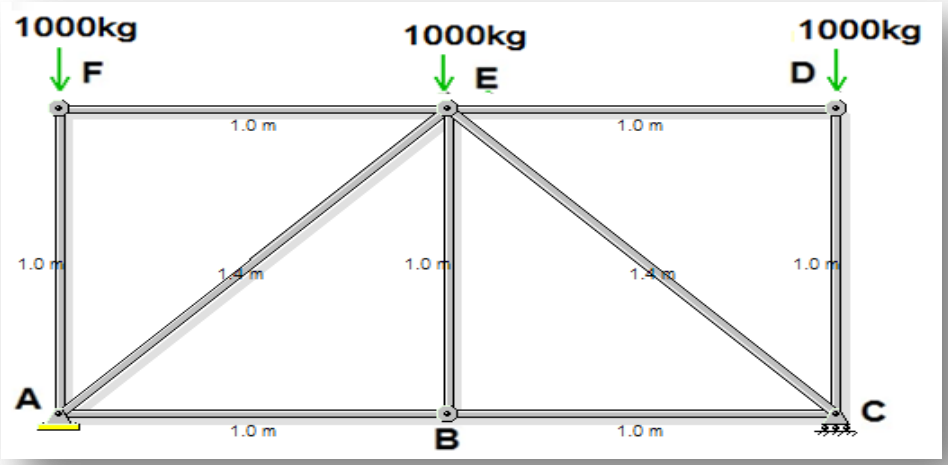
$$= \frac{1}{EI}\left(\left(\frac{-2600(X^3)}{(3)(3)} + \frac{1000(X^4)}{(3)(4)}\right)\Big|_0^3 + \frac{1200(X^3)}{3}\Big|_0^1\right)$$

$$= \frac{1}{EI}(-1050 + 400)$$

$$\Delta_C = \frac{-650}{EI} = \frac{650}{EI}$$

ตัวอย่างที่4

จงหา Δ_{B_y} และ Δ_{C_x} ของโครงสร้างต่อไปนี้



- หาแรงปฏิกิริยาจากแรงจริง

$\sum M_A = 0$;

$$2R_{C_y} = (1000 \times 2) + (1000 \times 1)$$
$$R_{C_y} = 1500 \text{ kg}$$

$\sum F_y = 0$; $R_{A_y} + 1500 = 3000$

$$R_{A_y} = 1500 \text{ kg}$$

- จากนั้น หาแรงภายในชิ้นส่วนแต่ละชิ้น จะได้ค่า **N** ของแต่ละชิ้นส่วนออกมา นำค่าที่ได้ไปใส่ในตาราง

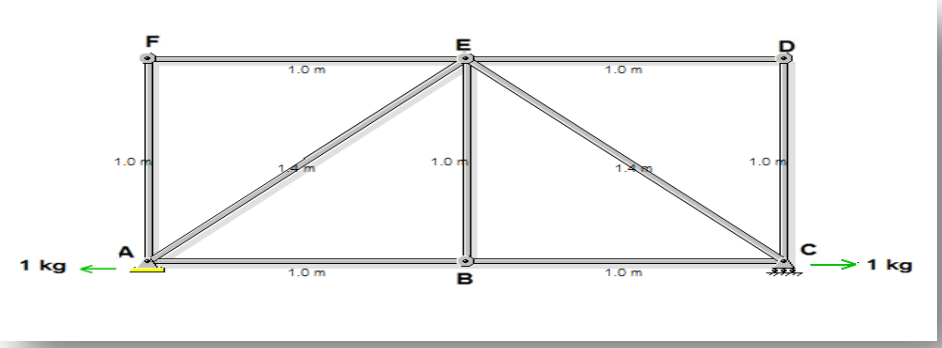
ชิ้นส่วน	N	n_1	n_2	L	Nn_1L	Nn_2L
AB	500					
AE	-707.11					
AF	-1000					
BE	0					
BC	500					
CD	-1000					
CE	-707.11					
DE	0					
EF	0					

ค่าที่เป็นบวก (+) จะเป็นแรงดึง
ค่าที่เป็นลบ (-) จะเป็นแรงอัด

- จากนั้น หาแรงภายในชิ้นส่วนแต่ละชิ้น จะได้ค่า n_1 ของแต่ละชิ้นส่วนออกมา นำค่าที่ได้ไปใส่ในตาราง

ชิ้นส่วน	N	n_1	n_2	L	Nn_1L	Nn_2L
AB	500	0.5				
AE	-707.11	-0.71				
AF	-1000	0				
BE	0	1				
BC	500	0.5				
CD	-1000	0				
CE	-707.11	-0.71				
DE	0	0				
EF	0	0				

- สมมติแรง 1 หน่วยกระทำกับโครงสร้างที่จุด C ในทิศไปทางขวา ดังรูป



$$\sum F_x = 0 \; ; \; R_{A_x} = 1 \text{ kg}$$

- จากนั้น หาแรงภายในชิ้นส่วนแต่ละชิ้น จะได้ค่า n_2 ของแต่ละชิ้นส่วนออกมา นำค่าที่ได้ไปใส่ในตาราง

ชิ้นส่วน	N	n_1	n_2	L	Nn_1L	Nn_2L
AB	500	0.5	1			
AE	-707.11	-0.71	1			
AF	-1000	0	0			
BE	0	1	0			
BC	500	0.5	0			
CD	-1000	0	0			
CE	-707.11	-0.71	0			
DE	0	0	0			
EF	0	0	0			

- ใส่ความยาว ของชิ้นส่วนในช่อง L และคำนวณหา Nn_1L และ Nn_2L

ชิ้นส่วน	N	n_1	n_2	L	Nn_1L	Nn_2L
AB	500	0.5	1	1	250	500
AE	-707.11	-0.71	1	$\sqrt{2}$	710	-1000
AF	-1000	0	0	1	0	0
BE	0	1	0	1	0	0
BC	500	0.5	0	1	250	0
CD	-1000	0	0	1	0	0
CE	-707.11	-0.71	0	$\sqrt{2}$	710	0
DE	0	0	0	1	0	0
EF	0	0	0	1	0	0
					1920	-500

จากสมการ $\Delta = \sum \frac{NnL}{AE}$

$$\Delta_{B_y} = \sum \frac{NnL}{AE}$$

$$\Delta_{B_y} = \frac{1920}{AE}$$

$$\Delta_{C_x} = \sum \frac{NnL}{AE}$$

$$\Delta_{C_x} = \frac{-500}{AE}$$

ดังนั้น $\Delta_{C_x} = \frac{500}{AE}$

การวิเคราะห์การโก่งตัวของคานโดยวิธีคาสติกลีอาโน

วิธีคาสติกลิอาโน (Castigliano Method) คาสติกลิอาโนได้เสนอทฤษฎีวิเคราะห์โครงสร้างอยู่สองทฤษฎี โดยทฤษฎีแรกจะใช้หาน้ำหนักที่มากระทำกับโครงสร้างเมื่อทราบการโก่งตัว แต่ไม่นิยมเพราะในการทำงานจริงเราสามารถหาน้ำหนักที่มากระทำกับโครงสร้างได้ก่อน ทฤษฎีที่สองจะใช้หาระยะการโก่งตัวและการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้าง ซึ่งทฤษฎีนี้ถูกประยุกต์เป็นทฤษฎีของงานน้อยที่สุดที่นำมาใช้สำหรับวิเคราะห์โครงสร้างอินดีเทอร์มิเนต ทฤษฎีที่สองนี้ได้กล่าวไว้ว่า ในโครงสร้างอีลาสติกซึ่งอยู่ในสมดุล การเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดใดจุดหนึ่งของโครงสร้างจะมีค่าเท่ากับอนุพันธ์อันดับหนึ่งของพลังงานความเครียดทั้งหมดที่สะสมในโครงสร้างเทียบกับขนาดของแรงภายนอกที่จุดนั้นในทิศทางเดียวกัน

ดังนั้นสมการของทฤษฎีที่สองคือ $\Delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n}$

โดยที่ P_n = แรงภายนอกซึ่งกระทำที่ตำแน่ง n

U = พลังงานความเครียดที่สะสมในโครงสร้าง

Δ_n = การเปลี่ยนตำแหน่งที่ตำแหน่ง n ในทิศทางของ P_n

การโก่งตัวทั้งเนื่องจากแรงภายในต่างๆนั้นเหมือนกับวิธีแรงหนึ่งหน่วย คือ

$$\Delta_{\text{ทั้งหมด}} = \Delta_{\text{แรงตามแนวแกน}} + \Delta_{\text{โมเมนต์ดัด}} + \Delta_{\text{แรงเฉือน}} + \Delta_{\text{โมเมนต์บิด}}$$

เช่นเดียวกับวิธีงานเสมือน 1 หน่วย โดยจะกล่าวถึงการโก่งตัวเนื่องจากแรงตามแนวแกนและเนื่องจากโมเมนต์ดัดเท่านั้น

การโก่งตัวเนื่องจากแรงตามแนวแกน

สมการหาการโก่งตัวคือ $\Delta = \int_0^L N \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)}{AE} dx$

ซึ่ง $\frac{\partial N}{\partial P}$ จะเท่ากับค่า n ในวิธีแรงหนึ่งหน่วย

หรือ $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k\left(\frac{\partial N_k}{\partial P}\right)L}{AE}$ (ในกรณีที่มีหลายชิ้นส่วน)

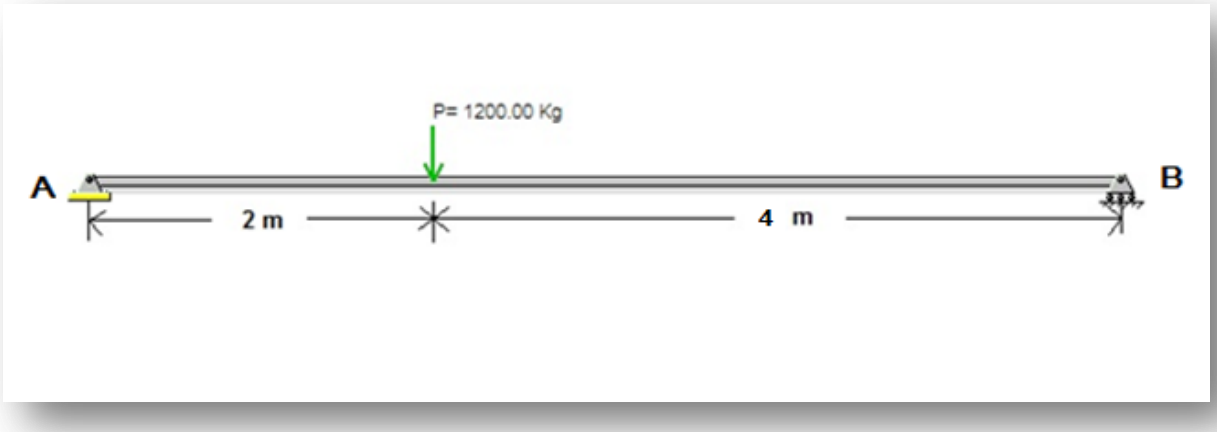
การโก่งตัวเนื่องจากโมเมนต์ดัด

สมการหาการโก่งตัวคือ $\Delta = \int_0^L \frac{M(\frac{\partial M}{\partial P})}{EI} dx$

ซึ่ง $\frac{\partial M}{\partial P}$ จะเท่ากับค่า ในวิธีแรงหนึ่งหน่วย

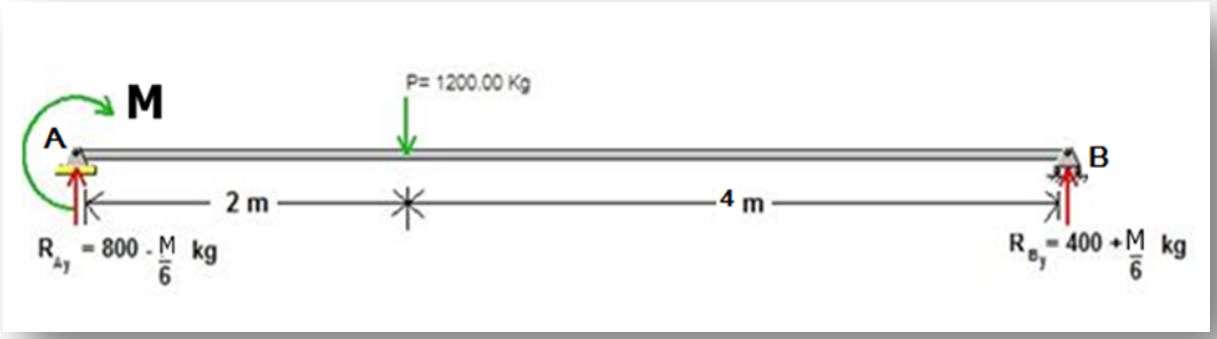
การวิเคราะห์การโก่งตัวโดยวิธีคาสติกลิอาโนจะต่างกับวิธีแรง 1 หน่วยคือ วิธีคาสติกลิอาโนจะใส่แรง P ที่ตำแหน่งที่ต้องการทราบการโก่งตัว หรือใส่โมเมนต์ M ที่ตำแหน่งที่ต้องการทราบมุมเบี่ยงเบนลงในโครงสร้างจริงซึ่งมีแรงภายนอกมากระทำ ซึ่งก็คือวิธีคาสติกลิอาโนจะรวมน้ำหนักกระทำจริงและสมมติไว้ในโครงสร้างเดียวกัน โดยที่ M=P=0

จงหา θ_A และ θ_B ของโครงสร้างในรูปโดยวิธีคาสติกลิอาโน



- หา θ_A สมมติโมเมนต์ M ที่จุด A

  - หาแรงปฏิกิริยา



$$\sum \mathbf{M_A} = \mathbf{0}\,;(\mathbf{1200}\times\mathbf{2}) + \mathbf{M} = \mathbf{6R_{By}}$$

$$\mathbf{2400} + \mathbf{M} = \mathbf{6R_{By}}$$

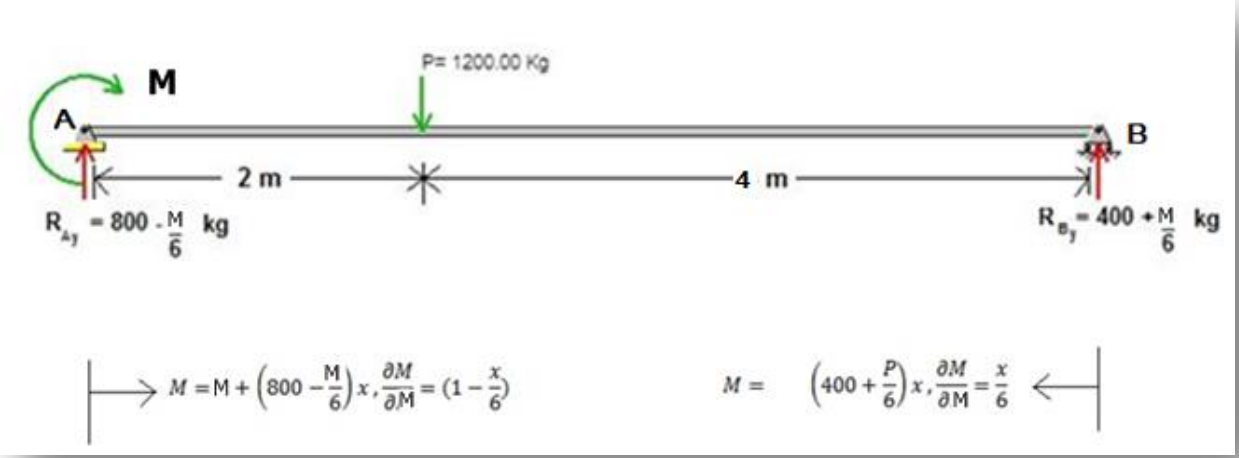
$$\mathbf{R_{By}} = \mathbf{400} + \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{6}}\ \mathbf{kg}$$

$$\sum F_y = 0 \; ; 1200 = R_{Ay} + 400 + \frac{M}{6}$$

$$R_{Ay} = 1200 - 400 - \frac{M}{6}$$

$$R_{Ay} = 800 - \frac{M}{6} \text{ kg}$$

- หาโมเมนต์ดัดที่เกิดจากแรงจริง และโมเมนต์ดัด M



จากสมการ $\theta = \int_0^L \frac{M(\frac{\partial M}{\partial P})}{EI} dx$

จะได้ $\theta_A = \frac{1}{EI}\left[\int_0^2 (800x)\left(1 - \frac{x}{6}\right)dx + \int_0^6 (400x)(\frac{x}{6})dx\right]$

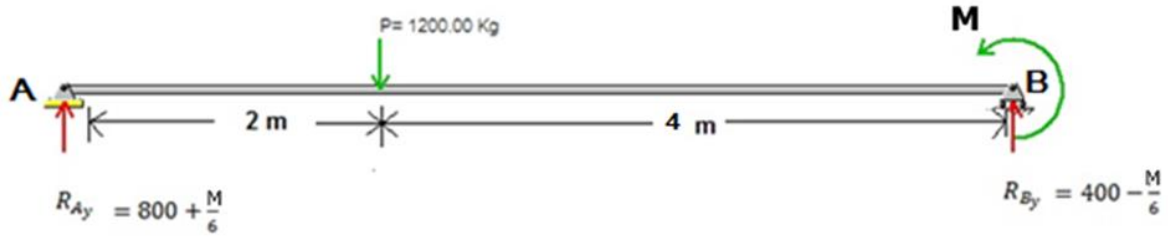
$$= \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{800x^2}{2} - \frac{800x^3}{18}\right)|_0^2 + \frac{400x^3}{18}|_0^4\right]$$

$$= \frac{1}{EI}(1600 - 355.56 + 1422.22)$$

$$\theta_A = \frac{2666.67}{EI}$$

- หา θ_B สมมติโมเมนต์ M ที่จุด B

- หาแรงปฏิกิริยา



$$\sum M_B = 0 \; ; (1200 \times 4) + M = 6R_{By}$$

$$4800 + M = 6R_{By}$$

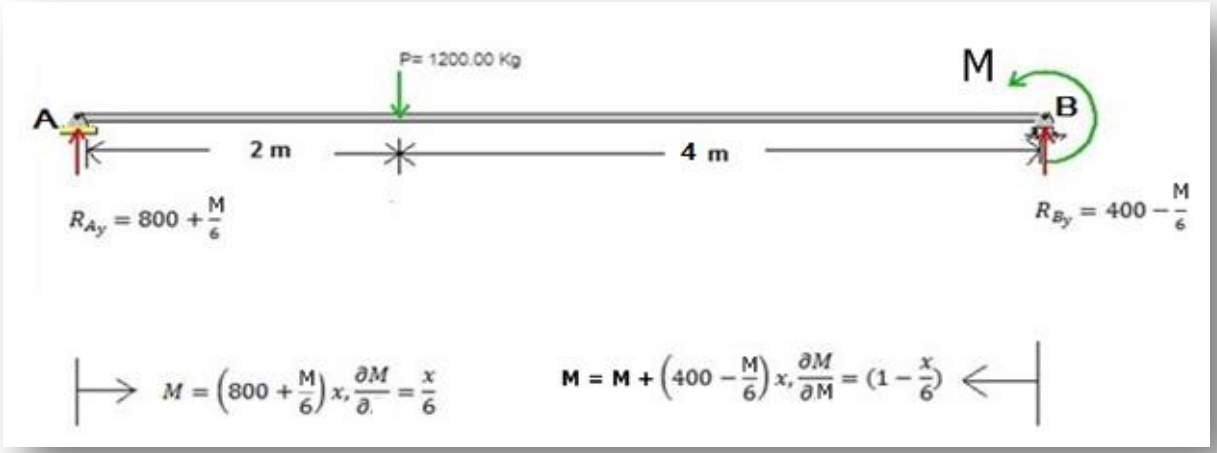
$$R_{By} = 800 + \frac{M}{6} \text{ kg}$$

$$\sum F_y = 0 \; ; 1200 = R_{By} + 800 + \frac{M}{6}$$

$$R_{By} = 1200 - 800 - \frac{M}{6}$$

$$R_{By} = 400 - \frac{M}{6} \text{ kg}$$

- **หาโมเมนต์ดัดที่เกิดจากแรงจริง และโมเมนต์ดัด M**



จากสมการ $\boldsymbol{\theta = \int_0^L \frac{M(\frac{\partial M}{\partial P})}{EI} dx}$

จะได้ $\boldsymbol{\theta_B = \frac{1}{EI}\left[\int_0^2 (800x)\left(\frac{x}{6}\right)dx + \int_0^4 (400x)(1 - \frac{x}{6})dx\right]}$

$$= \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{800x^3}{18}\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{400x^2}{2} - \frac{400x^3}{18}\Big|_0^4\right]\right.$$

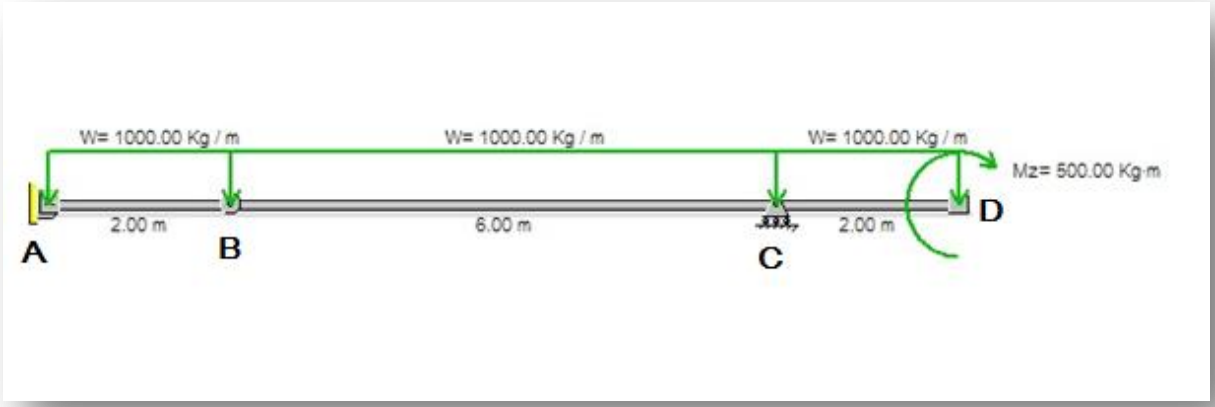
$$= \frac{1}{EI}(355.56 + 3200 - 1422.22)$$

$$\theta_A = \frac{2133.34}{EI}$$

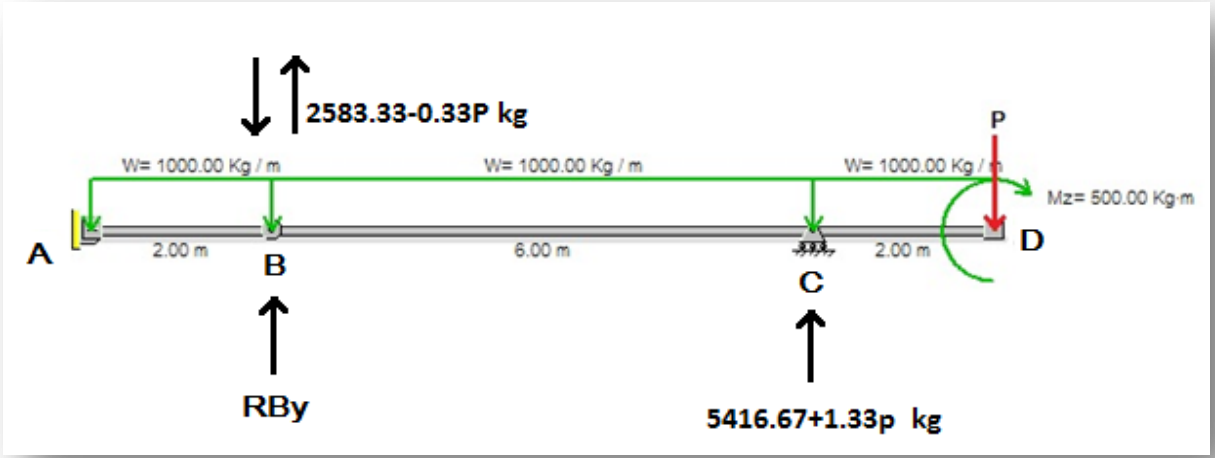
ตัวอย่างที่2

- จงหา Δ_D ของโครงสร้างในรูปโดยวิธีคาสติกลิอาโน

- สมมติแรง P กระทำที่จุด D ในทิศลงดังรูป



- หาแรงปฏิกิริยา



พิจารณาชิ้น B-C-D

$$\sum M_B = 0\ ;\ 6R_{C_y} = 8P + 500 + \left(\frac{1000\times 8^2}{2}\right)$$

$$R_{C_y} = 5416.67 + 1.33P\ \text{kg}$$

$$\sum F_y = 0\ ;\ V_B + 5416.67 + 1.33P = (1000 \times 8) + P$$

$$V_B = 2583.33 - 0.33P\ \text{kg}$$

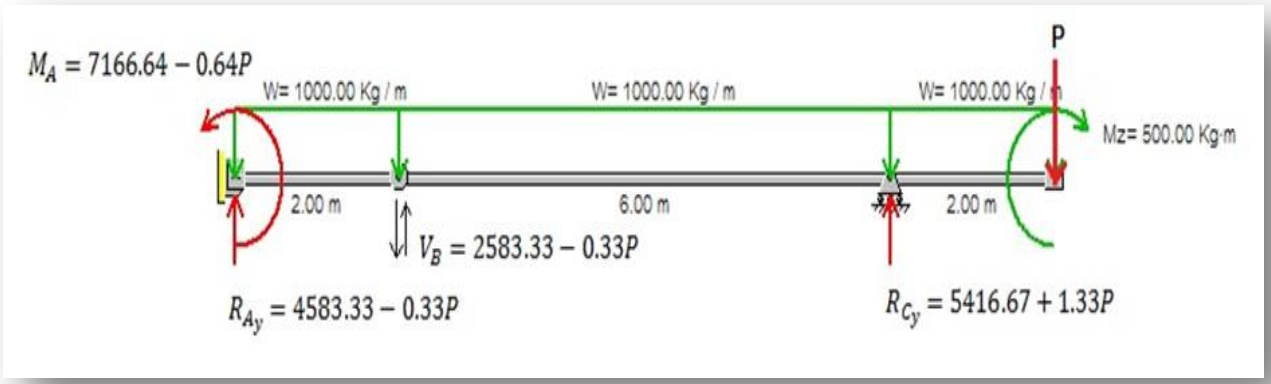
พิจารณาทั้งระบบ

$$\sum M_A = 0\ ;\ M_A + (5416.67 + 1.33P)(8) = 500 + \left(\frac{1000\times 10^2}{2}\right) + 10P$$

$$M_A = 7166.64 - 0.64P\ \text{kg.m}$$

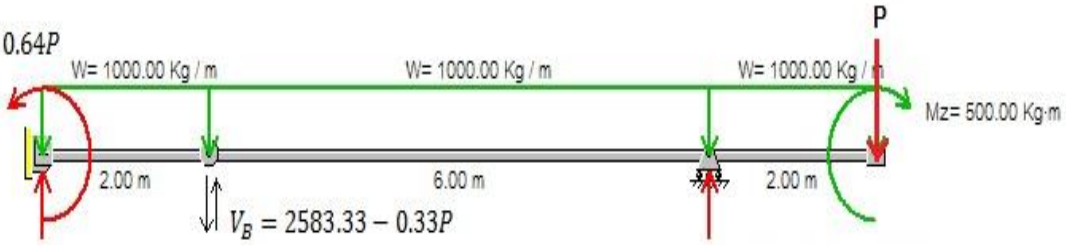
$$\sum F_y = 0\ ;\ R_{A_y} + 5416.67 + 1.33P = (1000 \times 10) + P$$

$$R_{A_y} = 4583.33 - 0.33P\ \text{kg}$$



- หาโมเมนต์ตัดจากแรงจริงและหาโมเมนต์ตัดจากแรง P

$M_A = 7166.64 - 0.64P$



$R_{A_y} = 4583.33 - 0.33P$

$R_{C_y} = 5416.67 + 1.33P$

$$M = (-2583.33x) - \left(\frac{1000x^2}{2}\right) \longleftrightarrow M = (2583.33x) - \left(\frac{1000x^2}{2}\right)$$

$$M = (-500) - \left(\frac{1000x^2}{2}\right) \longleftarrow$$

$$M = (-2583.33 + 0.33P)x - \left(\frac{1000x^2}{2}\right), \quad \frac{\partial M}{\partial P} = (0.33x) \longleftrightarrow M = (2583.33 - 0.33P)x - \left(\frac{1000x^2}{2}\right), \quad \frac{\partial M}{\partial P} = (-0.33x)$$

$$M = -500 - Px - \left(\frac{1000x^2}{2}\right), \quad \frac{\partial M}{\partial P} = (-x) \longleftarrow$$

จากสมการ $\Delta = \int_0^L \frac{M(\frac{\partial M}{\partial P})}{EI} dx$

$$\Delta_D = \frac{1}{EI}\left[\begin{array}{c}\int_0^2 (-2583.33x - 500x^2)(0.33x)dx + \int_0^6 (2583.33x - 500x^2)(-0.33x)dx \\ + \int_0^2 (-500 - 500x^2)(-x)dx\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{-852.5x^3}{3} - \frac{165x^4}{4}\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{852.5x^3}{3} + \frac{165x^4}{4}\right)\Big|_0^6 + \left(\frac{-500x^2}{2} + \frac{500x^4}{4}\right)\Big|_0^2\right]$$

$$= \frac{1}{EI}(-2273.33 - 660 - 61380 + 53460 + 1000 + 2000)$$

$$\Delta_A = \frac{-7853.33}{EI}$$

$$\Delta_A = \frac{7853.33}{EI}$$

อ้างอิง

เอกสารประกอบการเรียนการสอน **Structure of Theory**